$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\} = \sum_{k=n_0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει $\Rightarrow$ (κρ. συμπ. για την $(a_k)$)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ αποκλίνει, άτοπο.

Ασκ. 37

Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, νδο η $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

Απόδ.

Με άτοπο: Έστω ότι $\sum k a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ έχει φραγμένη ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

Η $(b_k = 1/k)$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων και $b_k \to 0$.

Απο κρ. Dirichlet, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot (k a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο. ∎

## Ασκ. 38

$a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Νδο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

Αποδ.

Παρατηρούμε ότι:

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} = a_k^{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{a_k}{\sqrt[k+1]{a_k}}.$$

Συγκρίνουμε τους όρους της $(a_k)$ με αυτούς της $(1/2^{k+1})$:

1η περίπτωση: $a_k > 1/2^{k+1} \Rightarrow \sqrt[k+1]{a_k} > 1/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 > \frac{1}{\sqrt[k+1]{a_k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_k > \frac{a_k}{\sqrt[k+1]{a_k}}.$$

2η περίπτωση: $a_k \leq 1/2^{k+1} \Rightarrow a^{\frac{k}{k+1}} \leq \left(1/2^{k+1}\right)^{k/k+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \geq a^{\frac{k}{k+1}}$$

Συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις παίρνουμε:

$$0 < \frac{a^k}{\sqrt[k+1]{a_k}} \leq 2a_k + \frac{1}{2^k}$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\left(2a_k + \frac{1}{2^k}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ συγκλίνει, από το κρ. σύγκρισης, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a^{\frac{k}{k+1}}$.

Ασκ.

Να ελέγξετε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ (ii) $\sum \frac{3^k k!}{k^k}$

Απαντ.

(i) Με κρ. λόγου

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = 2\frac{(k+1)!}{k!} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} =$$

$$= 2(k+1) \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k+1} = 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(ii) Ομοίως,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{3}{e} > 1,$$

άρα η σειρά αποκλίνει.

**ΕΡΩΤΗΣΗ:** Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k k!}{k^k}$;

Ασκ. 39

Έστω $(a_k)$ με $a_{2k-1} = \frac{1}{k}$ και $a_{2k} = \frac{1}{2^k}$.

Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ συγκλίνει.

Προσοχή! Η $(a_k)$ δεν είναι φθίνουσα, άρα δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Leibniz.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \atop +\infty}-\frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{\downarrow \atop 2} \longrightarrow +\infty$$

Αφού $S_{2n} \to +\infty$, η σειρά αποκλίνει.

Ασκ. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$

Κρ. λόγου: $\displaystyle\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)^{10}}{10^{k+1}}\cdot\frac{10^k}{k^{10}}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^{10}\cdot\frac{1}{10}\longrightarrow\frac{1}{10}<1$

άρα συγκλίνει.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Κρ. λόγου: $\displaystyle\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2}=\left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2\cdot\frac{(2k)!}{(2k+2)!}=$

$$=(k+1)^2\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\longrightarrow\frac{1}{4}<1$$

άρα συγκλίνει.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

Η $(1/\sqrt{k})$ είναι φθίνουσα στο 0, και εφαρμόζεται κρ. Leibniz.

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2^k+k} < \frac{1}{2^k}$ και εφαρμόζουμε κρ. σύγκρισης.

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

Παρατηρούμε ότι για $k \geq 2$: $\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$.
Αφού η $\Sigma 1/k$ αποκλίνει, και η $\Sigma \frac{\ln k}{k}$ αποκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης (με άτοπο).

(6) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^6}$

Παρατηρούμε ότι $\left(\left(\frac{1}{(\ln k)^6}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα θετικών όρων και εφαρμόζουμε κρ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(\ln 2^k)^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k\ln 2)^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(\ln 2)^6 \cdot k^6} =$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)^6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^6}$$

Δηλ. η σύγκλιση της σειράς (6) ισοδυναμεί με την σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(\ln 2^k)^6}$, που ισοδυναμεί με την σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^6}$. Εξετάζουμε την σύγκλιση της τελευταίας με κρ. λόγου:

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)^6} \cdot \frac{k^6}{2^k} = 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^6 \longrightarrow 2 > 1$$

άρα όλες αποκλίνουν.

(7) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$

Παρατηρούμε ότι η $\left(\frac{1}{\ln k}\right)$ είναι φθίνουσα στο 0, άρα η σειρά συγκλίνει, από κριτήριο Leibniz.

(8) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

Η $\left(\frac{1}{k(\ln k)^2}\right)$ είναι φθίνουσα στο 0. Με κρ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k (\ln 2^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \sum \frac{1}{k^2}$$

συγκλίνει, άρα συγκλίνει και η αρχική.

(9) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$.

$\left(\frac{1}{\ln k}\right)^k \downarrow$, $\left(\frac{1}{\ln k}\right)^k > 0$. Κριτ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k\ln 2)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k (\ln 2)^k}$$

Για την τελευταία εφαρμόζουμε κρ. ρίζας:

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{k^k (\ln 2)^k}} = \frac{2}{k \ln 2} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{όλες συγκλίνουν.}$$