Ασκ.

Να εξετάσετε αν συγκλίνουν οι σειρές:

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

Παρατηρούμε ότι $\ln k \uparrow \Rightarrow \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} \downarrow$ με θετικούς όρους άρα ισχύει κρ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(\ln 2^k)^{\ln 2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k\ln 2)^{k\ln 2}}$$

Για την τελευταία σειρά εφαρμόζουμε κρ. ρίζας:

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{(k\ln 2)^{k\ln 2}}} = \frac{2}{(\ln 2)^{\ln 2}} \cdot \frac{1}{k^{\ln 2}} \longrightarrow 0$$

άρα όλες οι σειρές συγκλίνουν.

(ii) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}$

Παρατηρούμε ότι η $\left(\frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα με θετικούς όρους, άρα ισχύει κρ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(\ln(\ln 2^k))^{\ln 2^k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(\ln(k\ln 2))^{k\ln 2}}$$

Για την τελευταία εφαρμόζουμε κρ. ρίζας:

$\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{(\ln(k\ln 2))^{\ln 2}} \longrightarrow 0$, άρα οι σειρές συγκλίνουν.

Ασκ.

Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνουν οι δυναμοσειρές:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{2^k}{k}} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} \to 2 = a \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 1/a = 1/2$.

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως στο $(-1/2, 1/2)$ και αποκλίνει για $|x| > 1/2$.

Για $x = 1/2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Για $x = -1/2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει από κρ. Leibniz. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x \in [-1/2, 1/2)$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[k]{k}}} \to 1 = a \Rightarrow$
$R = 1/a = 1$.

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως στο $(-1, 1)$ και αποκλίνει για $|x| > 1$.

Για $x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ αποκλίνει.

Για $x = -1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει από κρ. Leibniz. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x \in [-1, 1)$.

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$

$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{(k+1)^2} \longrightarrow 1 = a \Rightarrow R = 1.$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως για $|x|<1$ και αποκλίνει για $|x|>1$.

Για $x=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Για $x=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ συγκλίνει από κρ. Leibniz.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall\, x \in [-1,1]$.

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$

Εφαρμόζω στην σειρά κρ. λόγου:

$\frac{(k+1)!\, x^{k+1}}{k!\, x^k} = (k+1)\cdot x$

Η ακολουθία $((k+1)x)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό $\Leftrightarrow x=0$. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά συγκλίνει. Αποκλίνει $\forall\, x \neq 0$.

(v) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^{k!}$

Εφαρμόζω στην σειρά κρ. λόγου:

$\frac{(k+1)!\, x^{(k+1)!}}{k!\, x^{k}} = (k+1)\, x^{(k+1)!-k!} = (k+1)\, x^{k!(k+1-1)} =$

$= (k+1)\, x^{k!\,k}$

Για $|x| \geq 1 \Rightarrow |(k+1)\, x^{k!\,k}| \longrightarrow +\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει.

Ισχυριζόμαστε ότι για $|x|<1$ η ακολουθία $(k+1)x^{k!k}$ είναι μηδενική. Με κρ. λόγου:

$$\frac{(k+2)x^{(k+1)!(k+1)}}{(k+1)x^{k!k}} = \frac{k+2}{k+1}\cdot x^{(k+1)!(k+1)-k!k} =$$

$$= \frac{k+2}{k+1}\cdot x^{k![(k+1)^2-k]} = \frac{k+2}{k+1}\cdot x^{k!(k^2+k+1)} \to 1\cdot 0 = 0.$$

Άρα $(k+1)x^{k!k} \to 0$ και από το κρ. λόγου για την $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^{k!}$, η σειρά συγκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x\in(-1,1)$.

(vi) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{k!}$

Κριτήριο λόγου για την σειρά:

$$\frac{x^{(k+1)^2}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^{k^2}} = \frac{1}{k+1}\cdot x^{(k+1)^2-k^2} = \frac{x^{2k+1}}{k+1} \to ?$$

Εξετάζω την ακολουθία $\frac{x^{2k+1}}{k+1}$ ως προς σύγκλιση, με κρ. λόγου:

$$\frac{x^{2(k+1)+1}}{(k+1)+1}\cdot\frac{k+1}{x^{2k+1}} = \frac{k+1}{k+2}\cdot x^{2k+3-(2k+1)} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2}\cdot x^2 \to x^2$$

Αν $x^2<1 \iff |x|<1 \Rightarrow \frac{x^{2k+1}}{k+1}\to 0$ και η $\sum\frac{x^{k^2}}{k!}$ συγκλίνει.

Αν $x^2>1 \iff |x|>1 \Rightarrow \frac{x^{2k+1}}{k+1}\to +\infty$ και η $\sum\frac{x^{k^2}}{k!}$ αποκλίνει.

Αν $x=1$ η σειρά γίνεται $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ κι επειδή $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k^2}$ $\forall\ n \geq 4$ η σειρά $\Sigma \,^1/_{k!}$ συγκλίνει από το κρ. σύγκρισης με την σειρά $\Sigma \,^1/_{k^2}$.

Αν $x=-1$ η σειρά γίνεται $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ και συγκλίνει από κρ. Leibniz.

Άρα η αρχική σειρά συγκλίνει για $x \in [-1,1]$.

Άσκ.

Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει και $p > 1/2$, νδο $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδ.

Από ανισότητα Cauchy-Schwarz: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left| a_k \cdot \frac{1}{k^p} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \,^1/_{k^{2p}} \right)$$

Από υπόθ., το μερικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ συγκλίνει σε M_1 με $0 \leq M_1 \in \mathbb{R}$ και $\sum_{k=1}^{n} \,^1/_{k^{2p}}$ είναι μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς με εκθέτη του $1/k$ το $2p > 1$. Άρα συγκλίνει σε M_2 με $0 < M_2 \in \mathbb{R}$.

Τα μερικά αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n} \left| a_k \frac{1}{k^p} \right|$ είναι ακολουθία $\uparrow$ και άνω φραγμένη από $\sqrt{M_1} \cdot \sqrt{M_2}$, άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και η $\sum_{k=} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

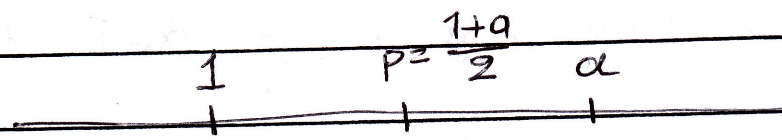
Ασκ.

Έστω (a_k) με $a_k > 0$ και $\exists \lim a_k > 1$. Νδο η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει

Απόδ.



Έστω $a = \lim a_k > 1 \Rightarrow a - 1 > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{a-1}{2}$.

Τότε $p = \frac{1+a}{2} = 1 + \varepsilon = a - \varepsilon > 1$.

Από την σύγκλιση της (a_k) στο a παίρνουμε ότι

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \quad a_n > p = a - \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{k^{a_k}} < \frac{1}{k^p}, \quad \forall\, k \geq n_0$

Από το κρ. σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει.