Άσκ 18

Να βρεθούν τα limsup, liminf και $\mathcal{K}$ των:

(i) $\beta_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\gamma_n = \frac{n^2((-1)^n + 1) + 2n + 1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Απαντ.

(i) Παρατηρώ ότι $n\pi/3 = 2k\pi \iff n = 6k$.

Θεωρώ τις παρακάτω υπακολουθίες της (β_n):

$$\beta_{6k} = \cos\left(\frac{6k\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+1} = \cos(2k\pi) + \frac{1}{6k+1} \to 1.$$

$$\beta_{6k+1} = \cos\left(\frac{6k\pi+\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+2} = \cos \pi/3 + \frac{1}{6k+2} \to 1/2$$

$$\beta_{6k+2} = \cos\left(\frac{6k\pi+2\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+3} = \cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{6k+3} \to -1/2.$$

$$\beta_{6k+3} = \cos\left(\frac{6k\pi+3\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+4} = \cos\pi + \frac{1}{6k+4} \to -1$$

$$\beta_{6k+4} = \cos\left(\frac{6k\pi+4\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+5} = \cos\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{6k+4} \to -1/2.$$

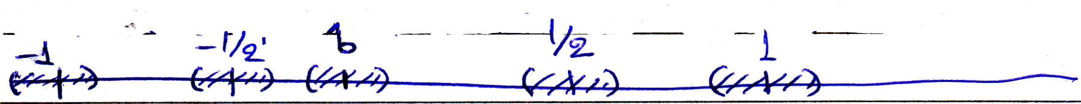
$$\beta_{6k+5} = \cos\left(\frac{6k\pi+5\pi}{3}\right) + \frac{1}{6k+6} = \cos\frac{5\pi}{3} + \frac{1}{6k+6} \to 1/2.$$

Άρα $\{1, -1, 1/2, -1/2\} \subseteq \mathcal{K}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{K} \in \{1, -1, 1/2, -1/2\}$.

Έστω $b \in \mathcal{K}$, $b_{k_n} \to b$ και $b \notin \{1, -1, 1/2, -1/2\}$.

$\exists\ \varepsilon > 0$: τα διαστήματα $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$, $(-1/2-\varepsilon, -1/2+\varepsilon)$,



$(1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon)$, $(1-\varepsilon\ 1+\varepsilon)$ και $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ να είναι ξένα.

Συνδυάζοντας την σύγκλιση των υπακολουθιών $(\beta_{6n}), \ldots, (\beta_{6n+5})$ βρίσκουμε $n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1$

$$\beta_{6n} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

$$\beta_{6n+1} \in (1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon) \ni \beta_{6n+5}$$

$$\beta_{6n+2} \in (-1/2-\varepsilon, -1/2+\varepsilon) \ni \beta_{6n+4}$$

$$\beta_{6n+3} \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$$

Από την σύγκλιση της $(\beta_{\lambda n})$ στο b, βρίσκουμε $n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2:$

$$\beta_{\lambda_n} \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Όμως η (β_{λ_n}) έχει άπειρους κοινούς όρους με τουλάχιστον μία από τις υπακολουθίες $(\beta_{6n}), \ldots, (\beta_{6n+5})$, έστω την (β_{6n}). Αυτοί οι άπειροι όροι αποτελούν υπακολουθία $(\beta_{\lambda_{\mu_n}})$ και της (β_{λ_n}), [οπότε $\beta_{\lambda_{\mu_n}} \to b$, και της (β_{6n}), οπότε $\beta_{\lambda_{\mu_n}} \to 1$. Άρα $b=1$, και $K=\{-1, 1, -1/2, 1/2\}$, από το οποίο παίρνουμε

$\limsup b_n = \sup K = \max K = 1$ και

$\liminf b_n = \inf K = \min K = -1.$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\gamma_{2n} = \frac{4n^2(1+1)+4n+1}{2n+1} = \frac{8n^2+4n+1}{2n+1} \to +\infty.$$

$$\gamma_{2n-1} = \frac{4n-1}{2n} \to 2, \quad \text{άρα } \{2, +\infty\} \subseteq K.$$

Θδο $K=\{2,+\infty\}$. Πράγματι, έστω $c \in K$ και $\gamma_{k_n} \to c$. Τότε:

(1) Αν η $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρους περιττούς και άπειρους άρτιους όρους, οι περιττοί δίνουν υπακολουθία της (γ_{2n-1}) και της (γ_{k_n}), άρα αυτή συγκλίνει και στο 2 και στο $c \Rightarrow c=2$. Όμως οι άπειροι άρτιοι δίνουν υπακολουθία και της (γ_{2n}) και της (γ_{k_n}), άρα αυτή συγκλίνει και στο $+\infty$ και στο $c \Rightarrow c=+\infty$, άτοπο.

(2) Αν η $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρους περιττούς όρους και πεπερ. άρτιους, τότε η υπακολουθία των περιττών συγκλίνει στο 2 και στο $c \Rightarrow c=2$.

(3) Ανάλογα, αν η (k_n) έχει άπειρους άρτιους όρους και πεπερ. περιττούς, τότε $c=+\infty$

(4) Η (k_n) δεν μπορεί να έχει πεπερ. άρτιους και πεπερ. περιττούς μαζί το σύνολο των δεικτών $\{k_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι άπειρο.

Άρα $K=\{2,+\infty\}$, $\limsup \gamma_n=+\infty$, $\liminf \gamma_n = 2$.

Ασκ 13

(a_n) ακολ. στο $\mathbb{R}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$a_{2n} \le a_{2n+2} \le a_{2n+1} \le a_{2n-1}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$$

Νδο $a_n \to a \in \mathbb{R}$ και $a_{2n} \le a \le a_{2n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αποδ.

Παρατηρούμε ότι:

$(a_{2n})\uparrow$ και άνω φραγμ. από a_1.

$(a_{2n-1})\downarrow$ και κάτω φραγμ. από a_2:

$$a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1} \leq \dots \leq a_3 \leq a_1.$$

Άρα $a_{2n} \to x \in \mathbb{R}$ και $a_{2n-1} \to y \in \mathbb{R}$.

$|x-y| = |\lim a_{2n} - \lim a_{2n-1}| = \lim |a_{2n} - a_{2n-1}| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y = a \in \mathbb{R}$.

$(a_{2n})\uparrow \Rightarrow a_{2n} \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$(a_{2n-1})\downarrow \Rightarrow a_{2n-1} \geq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ασκ 21. (a_n) φραγμ. ΝΔο

$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$.

Αποδ. Δείχνουμε την πρώτη:

$x := \limsup(-a_n) \Rightarrow \exists\, (-a_{k_n})$ υπακολουθία της $(-a_n)$: $-a_{k_n} \to x$

$\Rightarrow a_{k_n} \to -x \in K_a \Rightarrow -x \geq \liminf a_n =: y$. (1)

$y = \liminf a_n \Rightarrow \exists\, (a_{\lambda_n})$ υπακολ. της (a_n): $a_{\lambda_n} \to y \Rightarrow$

$\Rightarrow -a_{\lambda_n} \to -y \in K_{-a} \Rightarrow -y \leq \sup K_{-a} = \limsup(-a_n) = x$

$\Rightarrow y \geq -x$. (2)

Από (1), (2): $x = -y$.