ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ / ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Επανερχόμαστε στην σχέση των ιδιοτήτων μιας (a_n) και των υπακολουθιών της.

Γνωρίζουμε ότι:

(1) $a_n \to \begin{cases} a\in\mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow$ κάθε $a_{k_n} \to \begin{cases} a\in\mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(2) (a_n) φραγμένη $\Rightarrow$ κάθε (a_{k_n}) φραγμένη

(3) (a_n) μονότονη $\Rightarrow$ κάθε (a_{k_n}) μονότονη.

Επειδή κάθε ακολουθία είναι υπακολουθία του εαυτού της ισχύουν και τα αντίστροφα των (1), (2), (3).

<u>Ερ. 1.</u> $a_n \not\to a \overset{;}{\Rightarrow}$ κάθε $a_{k_n} \not\to a$.

όχι, π.χ: $a_n = (-1)^n \not\to 1$ αλλά $a_{2n} = 1 \to 1$.

<u>Ερ. 2.</u> (a_n) όχι φραγμ. $\overset{;}{\Rightarrow}$ κάθε (a_{k_n}) όχι φραγμ.

όχι, π.χ: $a_n = \begin{cases} n, & n=2k \\ 1/n, & n=2k-1 \end{cases}$, δηλ:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6, 1/7, 8, 1/9, \ldots)$.

Τότε (a_n) όχι φραγμ. αλλά (a_{2k-1}) φραγμένη.

Ερ. 3 (a_n) όχι μονότονη $\overset{?}{\Longrightarrow}$ κάθε (a_{k_n}) όχι μονότονη.

όχι! κάθε (a_n) έχει μονότονη (a_{k_n}) (Θεώρ!).
π.χ. η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} n, & n=2k \\ 1/n, & n=2k-1 \end{cases}$$

δεν είναι μονότονη αλλά έχει $(a_{2k})\uparrow$ και $(a_{2k-1})\downarrow$.

Ερ. 4 Είναι αληθή η φράση τα παρακάτω;

(1) $a_n \to +\infty \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall M>0$ $\exists$ άπειροι όροι της (a_n) μεγαλύτεροι του M.

Απαντ. $(\Rightarrow)$ σωστό: ο ορισμός του $a_n \to +\infty$ λέει ότι όχι μόνο είναι άπειροι, αλλά μετά το $n_0 = n_0(M)$ είναι όλοι.
$(\Leftarrow)$ λάθος: (πόσοι είναι οι υπόλοιποι;)
$a_n = (-1)^n \cdot n$
$b_{2n} = 2n$, $b_{2n-1} = 0$.

(1α) $a_n \to +\infty \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall M>0$ $\exists$ άπειροι όροι της (a_n) και πεπερασμένοι $\leq M$.

(2α) (a_n) όχι άνω φραγμ. $\overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall M>0$ $\exists$ άπειροι όροι $>M$.

Απαντ. σωστό, προφανές.

Παρατ. Αν οι όροι που έχουν μια ιδιότητα είναι άπειροι, φτιάχνουν υπακολουθία.

(2β) (a_n) όχι άνω φραγμ. $\Leftrightarrow \exists\, a_{k_n} \to +\infty$.

Απαντ. σωστό:

$(\Rightarrow)$ (a_n) όχι άνω φρ $\Leftrightarrow \forall M>0$ υπάρχουν άπειροι όροι $>M$.

$M=1 \Rightarrow \exists\, a_{k_1} > M = 1$.

$M=2 \Rightarrow \exists$ άπειροι όροι $>2 \Rightarrow \exists\, k_2 > k_1 :\ a_{k_2} > 2$.

$M=3 \Rightarrow$ — " — όροι $>3 \Rightarrow \exists\, k_3 > k_2 :\ a_{k_3} > 3$.

και επαγωγικά:

$M=n \Rightarrow \exists$ άπειροι όροι $>n \Rightarrow \exists\, \underbrace{k_n > k_{n-1}}_{\Downarrow} :\ \underbrace{a_{k_n} > n \to +\infty}_{\Downarrow}$

(a_{k_n}) υπακολ. $\qquad a_{k_n} \to +\infty$.

$(\Leftarrow)$ $\exists\, a_{k_n} \to +\infty \Rightarrow (a_{k_n})$ όχι φραγμ. $\Rightarrow (a_n)$ όχι φραγμ.

(3) Αν (a_n) δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία $\Rightarrow$ έχει μια γνησίως αύξουσα.

Απαντ. Σωστό; (Αποδ. Β του ΘBW) Πόσα σημεία κορυφής έχει η (a_n);

$\to$ άπειρα $\Rightarrow$ αποτελούν $\downarrow$ υπακολουθία, άτοπο.

$\to$ πεπερ. $\Rightarrow$ κλπ... (όπως στην Αποδ. Β του BW).

(*) Ασκ. $(a_n)\uparrow$ και $\exists\, (a_{k_n}) : a_{k_n} \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \to a$.

Αποδ. $\uparrow (a_{k_n})$ συγκλίνουσα $\Rightarrow (a_{k_n})$ φραγμένη, έστω από M (άνω). Δηλ:

$a_{k_1} \le a_{k_2} \le \dots \le a_{k_n} \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $(a_n)\uparrow$ και $n \le k_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$\Rightarrow a_1 \le a_n \le a_{k_n} \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (a_n)\uparrow$ και φραγμ. από a_1 και M $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to x \in \mathbb{R}$.

Άρα και $a_{k_n} \to x \Rightarrow x = a$.

Ασκ. $a_n \to 0 \Rightarrow \exists\, (a_{k_n}) : n^2 \cdot a_{k_n} \to 0$.

Αποδ. $a_n \to 0 \Rightarrow$

$\varepsilon = 1 > 0 \quad \exists\, k_1 \in \mathbb{N} : \ |a_{k_1}| < 1$. (και όλοι οι επόμενοι).

$\varepsilon = 1/2^3 \quad \exists\, k_2 > k_1 \quad |a_{k_2}| < 1/2^3$ (— " —).

⋮

$\varepsilon = 1/n^3 \quad \exists\, \underbrace{k_n > k_{n-1}}_{\Downarrow} \quad \underbrace{|a_{k_n}| < 1/n^3}_{\Downarrow}$ (— " —)

(a_{k_n}) υπακολ. $\quad \underset{\downarrow \atop 0}{0} < n^2 |a_{k_n}| < \underset{\downarrow \atop 0}{1/n} \Rightarrow$

$n^2 a_{k_n} \to 0$.

Ασκ. 11 ⊛

⊛ = Θεωρία.

$a_n \to a \Leftrightarrow a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to a$.

Απόδειξη. $a_n \to a \Rightarrow$ κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο $a \Rightarrow$ ομοίως & οι $(a_{2n}), (a_{2n-1})$.

Αντίστροφα: Έστω $\varepsilon > 0$.

$a_{2n} \to a \Rightarrow [\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: n > n_1 \Rightarrow |a_{2n} - a| < \varepsilon]$

$a_{2n-1} \to a \Rightarrow [\exists\, n_2 \in \mathbb{N}: n > n_2 \Rightarrow |a_{2n-1} - a| < \varepsilon]$

Άρα $|a_m - a| < \varepsilon$ για $m > 2n_1$ άρτιο

$m > 2n_2 - 1$ περιττό

θέτω $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$. ∎

Ασκ. 12

(a_n) ακολουθία: $(a_{2n}), (a_{2n-1}), (a_{3n})$ συγκλίνουν.

Νδο (a_n) συγκλίνει.

Αποδ. (a_{6n}) υπακολουθία της (a_{2n}) και της (a_{3n})

$a_{2n} \to x$, $a_{2n-1} \to y$, $a_{3n} \to z$

$$\left.\begin{array}{l} a_{6n} \to x \\ a_{6n} \to z \end{array}\right\} \Rightarrow x = z.$$

(a_{6n-3}) υπακολουθία της (a_{2n-1}) και της (a_{3n})

$$\left.\begin{array}{l} a_{6n-3} \to y \\ a_{6n-3} \to z = x \end{array}\right\} \Rightarrow y = x = z.$$

$a_{2n}, a_{2n-1} \to x$ από προηγ. ασκ. $\Rightarrow a_n \to x$. ∎

Ασκ 15.

(a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. ΝΔο

$a_n \not\to a \in \mathbb{R} \iff \exists\, \varepsilon > 0$ και $\exists\, (a_{k_n}) : |a_{k_n} - a| > \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ.

$a_n \to a \overset{\text{ορσ}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$.

$a_n \not\to a \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n > n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$.

Άρα:

$(\Rightarrow)$ $a_n \not\to a \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$: για $n_0 = 1\ \exists\, k_1 > 1 : |a_{k_1} - a| \geq \varepsilon$

για $n_0 = k_1\ \exists\, k_2 > k_1 : |a_{k_2} - a| \geq \varepsilon$

$\vdots$

για $n_0 = k_{n-1}\ \exists\, \underbrace{k_n > k_{n-1}}_{\Downarrow} : \underbrace{|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon}_{\text{ζητούμενη}}$

(a_{k_n}) υπακολ.

ζητούμενη: για $\varepsilon/2$ γίνεται $|a_{k_n} - a| > \varepsilon/2$.

$(\Leftarrow)$ συνθήκη δεξιά $\Rightarrow \exists\, a_{k_n} \not\to a$.

Αν $a_n \to a \Rightarrow a_{k_n} \to a$, άτοπο.

Ασκ.

(a_n) φραγμ., $a_n \not\to a \Rightarrow \exists\, b \neq a$ και $(a_{k_n}) : a_{k_n} \to b$.

Αποδ.

Έστω $a_n \not\to a$. Από Ασκ. 15, $\exists\, \varepsilon > 0$, (a_{k_n}):

$|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(a_{k_n}) φραγμ. $\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists\, a_{k_{\lambda_n}} \to b \in \mathbb{R}$.

Τότε

$|b - a| = |\lim a_{k_{\lambda_n}} - a| = |\lim (a_{k_{\lambda_n}} - a)| = \lim |a_{k_{\lambda_n}} - a| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow b \neq a$.

Ασκ. 16

$a_n \to a \in \mathbb{R} \iff$ κάθε υπακολουθία της (a_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο a.

Απόδ.

($\Rightarrow$) Εστω $a_n \to a \in \mathbb{R}$ και (a_{k_n}) υπακολουθία $\Rightarrow$
$\Rightarrow a_{k_n} \to a$ και κάθε $a_{k_{\lambda_n}} \to a$.

($\Leftarrow$) Με άτοπο: Εστω ότι κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) έχει $a_{k_{\lambda_n}} \to a$ και ότι $a_n \not\to a$. Απο την Ασκ 15, $\exists (a_{k_n})$ και $\varepsilon > 0$: $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$. Τότε $\forall (a_{k_{\lambda_n}})$: $|a_{k_{\lambda_n}} - a| \geq \varepsilon \Rightarrow a_{k_{\lambda_n}} \not\to a$, άτοπο.

Ασκ 14.

Εστω (a_n) φραγμ., $K = \{$οριακά σημεία της $(a_n)\}$, (x_n) ακολουθία στο K, $x_n \to \xi$. Νδο $\xi \in K$.

Απόδ.

Για νδο $\xi \in K$, αρκεί νδο

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \geq m : |a_n - \xi| < \varepsilon.$$

Εστω $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

$x_n \to \xi \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - \xi| < \varepsilon/2$. Άρα:

$$|x_{n_0} - \xi| < \varepsilon/2. \qquad (1)$$

Ομως $x_{n_0} \in K \Rightarrow$

για $\varepsilon/2 > 0$ και $n_1 = \max\{n_0, m\} \in \mathbb{N}$: $\exists n \geq n_1 \geq m$:

$$|a_n - x_{n_0}| < \varepsilon/2. \qquad (2)$$

Επομένως, από (1), (2):

$$|a_n - \xi| \leq |a_n - x_{n_0}| + |x_{n_0} - \xi| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άσκηση (Μέθοδος):

Έστω $a_n = (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθούν τα $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ και K.

Απάντ.

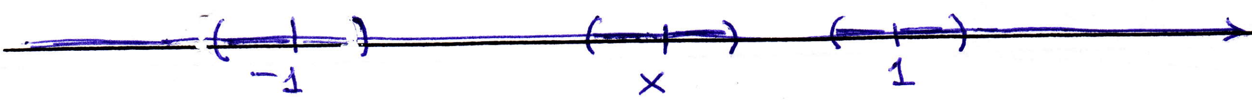
Παρατηρώ ότι $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n} \to 1 \in K$

$a_{2n-1} = -1-\frac{1}{2n-1} \to -1 \in K$, δηλ.

$\{-1, 1\} \subseteq K$. Θ.δ.ο. $K \subseteq \{-1, 1\}$, δηλ. ότι $K = \{-1, 1\}$.

Έστω $x \in K$, $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Θα καταλήξω σε άτοπο.

Α΄ τρόπος: $\exists\, \varepsilon > 0$: $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ να είναι ξένα:



$a_{2n-1} \to -1 \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1: a_{2n-1} \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$.

$a_{2n} \to 1 \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2: a_{2n} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Θέτω $n_0 = \max\{2n_1 - 1, 2n_2\}$. Τότε $\forall n \geq n_0$:

$a_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ ή $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, άρα

$a_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Επειδή

$a_{k_n} \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, άτοπο.

Β΄ τρόπος: $\exists\, a_{k_n} \to x$. Η οικογ. $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει:

(i) $\{k_n$: άρτια$\}$ πεπερ $\wedge$ $\{k_n$: περιττά$\}$ πεπερ: άτοπο.

(ii) $\{k_n$ άρτια$\}$ πεπερ $\wedge$ $\{k_n$: περιττά$\}$ άπειρο $\Rightarrow a_{k_n} \to -1 = x$.

(iii) $\{k_n$ άρτια$\}$ άπειρα $\wedge$ $\{k_n$ περιττά$\}$ πεπερ $\Rightarrow a_{k_n} \to 1 = x$.

(iv) $\{k_n$ άρτια$\}$ άπειρα $\wedge$ $\{k_n$ περιττά$\}$ άπειρα $\Rightarrow$

$a_{k_n \text{ άρτια}} \to 1 = x$, $a_{k_n \text{ περιττά}} \to -1 = x$, άτοπο.