11/6/2012 30ο μάθημα

(Τελ.) Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \quad , \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \; , \; \int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$$

(όπου $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, P, Q πολυώνυμα δυο μεταβλητών)

1.) $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx = \int \underbrace{R(\sin y, \cos y)\cos y}\, dy$

$x = \sin y$

$dx = \cos y\, dy$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y}$
$= \sqrt{\cos^2 y} = \cos y$

Αυτό υπολογίζεται: ρητή συνάρτηση των $\sin y$, $\cos y$.

Κάνουμε την αντικατάσταση $u = \tan\frac{y}{2}$ και μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

2.) $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$

Α' τρόπος

$x = \dfrac{1}{\cos y}$ $\quad x^2 - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 y} - 1 = \tan^2 y$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \tan y$

$dx = \dfrac{\sin y}{\cos^2 y}\,dy$

$\Downarrow$

$$\int \underbrace{R\left(\frac{1}{\cos y}, \frac{\sin y}{\cos y}\right)\frac{\sin y}{\cos^2 y}}_{\text{Ρητή των } \sin y, \cos y}\, dy$$

Β' τρόπος

Θέτουμε $u-x=\sqrt{x^2-1}$ (δηλ. η αντικατάσταση είναι $u=x+\sqrt{x^2-1}$)

Τότε $u^2-2ux+x^2=x^2-1 \Rightarrow x=\boxed{\frac{u^2+1}{2u}}$

Άρα, $\sqrt{x^2-1}=u-x=u-\frac{u^2+1}{}$

Άρα, $\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx=\int \underbrace{R\left(\frac{u^2+1}{2u},\frac{u^2-1}{2u}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}}_{\text{υπολογίζεται}}du$

Παράδειγμα:

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx \overset{u=x+\sqrt{x^2+1}}{=\!=\!=} \int\frac{u^2-1}{2u}\cdot\frac{u^2+1}{2u^2}du$$

$$=\int\frac{u^4-1}{4u^3}du=\int\left(\frac{u}{4}-\frac{1}{4u^3}\right)du=\frac{u}{8}+\frac{1}{8u^2}+c$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8}+\frac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c$$

3.) $\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$

Α' τρόπος

$x=\tan y$

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 y+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\cos y}$

$dx=\frac{1}{\cos^2 y}dy$

$\Downarrow$

$\int R\left(\frac{\sin y}{\cos y},\frac{1}{\cos y}\right)\frac{1}{\cos^2 y}dy \xrightarrow{u=\tan^{y}/_{2}}$ Ρητό

Β' τρόπος (προτιμότερος)

Θέτουμε $u-x=\sqrt{x^2+1}$ (δηλ. η αντικατάσταση είναι $u=x+\sqrt{x^2+1}$)

- $u^2-2ux+x^2=x^2+1$

$\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{2u}$

- $\sqrt{x^2+1}=u-x=u-\frac{u^2-1}{2u}=\frac{u^2+1}{2u}$

$\Rightarrow \boxed{x^2+1=\frac{u^2+1}{2u}}$

- $dx=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2u^2}\right)du \Rightarrow \boxed{dx=\frac{u^2+1}{2u^2}du}$

$$\Rightarrow \int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx = \int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

Υπολογίζεται.

Παράδειγμα:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx \overset{u=x+\sqrt{x^2+1}}{=} \int \frac{2u}{u^2-1}\cdot\frac{2u}{u^2+1}\cdot\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2-1} = -\int\frac{du}{u+1} + \int\frac{du}{u-1}$$

$$= -\ln|u+1| + \ln|u-1| + c.$$

$$= \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right| + c.$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-1}$$

$$= \frac{(a+b)u+(b-a)}{u^2-1}$$

$a+b=0$, $b-a=1$ | $b=1/2$, $a=-1/2$

Άσκηση (όλες οι μέθοδοι)

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1.) $$\int\frac{dx}{\cos^4x} = \frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{\cos^2x} = \int(1+\tan^2x)\frac{1}{\cos^2x}dx \;\; \frac{y=\tan x}{y'=\frac{1}{\cos^2x}dx}$$

$$= \int(1+y^2)dy = y + \frac{y^3}{3} + c = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + c.$$

(2.) $$\int\sqrt{\tan x}\,dx = \int u\cdot\frac{2u}{u^4+1}du = \int\frac{2u^2}{u^4+1}du$$ (Ρητό, υπολογίζεται)

$u=\sqrt{\tan x}$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx$$

$$= \frac{\tan^2x+1}{2\sqrt{\tan x}}dx$$

$$= \frac{u^4+1}{2u}dx \quad \text{Δηλ. } dx = \frac{2u}{u^4+1}du$$

Παραγοντοποιούμε το $u^4+1=u^4+2u^2+1-2u^2=(u^2+1)^2-(\sqrt{2}u)^2$
$=(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$

Μετά βρίσκουμε a,b,γ,δ ώστε

$$\frac{2u^2}{u^4+1}=\frac{au+b}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{\gamma u+\delta}{u^2-\sqrt{2}u+1}$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε τα $\int\frac{au+b}{u^2+\sqrt{2}u+1}du$, $\int\frac{\gamma u+\delta}{u^2-\sqrt{2}u+1}du$

$$\int\frac{2u+\sqrt{2}\,du}{u^2+\sqrt{2}u+1}\qquad\int\frac{du}{u^2+\frac{2\sqrt{2}}{2}u+1}=\int\frac{du}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\underset{y=\frac{u+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{=}\dots$$

$y=u^2+\sqrt{2}u+1$

$$=\int\frac{dy}{y^2+1}$$

3.) $\int\sin(\log x)dx=\int\sin u\cdot e^u du=\int\sin u\cdot(e^u)'du$
$=e^u\sin u-\int\cos u\cdot e^u du$
$=e^u\sin u-\int\cos u(e^u)'du$
$=e^u\sin u-\cos u\cdot e^u-\int\sin u\cdot e^u du$

$u=\log x$
$du=\frac{1}{x}dx$
$x=e^u$
$dx=x\cdot du=e^u du$

Άρα, $\int\sin u\cdot e^u du=\frac{e^u(\sin u-\cos u)}{2}$

$$=x\cdot\frac{\sin(\log x)-\cos(\log x)}{2}+c.$$

4) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

Είναι η $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ παράγωγος;

$$\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]' = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2} = \int \left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)' \arctan x\, dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$(\arctan x)'$

Το $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ υπολογίζεται με αναδρομικό τύπο:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

$\searrow \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (για $n=1$)

$n=1$ γνωστό $\arctan x$.

5.) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)dx = \int \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' \log(1-x)dx$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{2\log(1-x)}{\sqrt{x}} - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-x}dx$$

Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx = \int \frac{1}{u(1-u^2)}2u\,du$

Θέτουμε $u=\sqrt{x}$

$1-x = 1-u^2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$= \frac{1}{2u}dx$

$\Rightarrow dx = 2u\,du$

το κάναμε πριν λίγο.

6.) $\int \frac{x\cdot e^x}{(1+x)^2}dx = \int \left(-\frac{1}{1+x}\right)' x\cdot e^x dx$

$= -\frac{x\cdot e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(x\cdot e^x)' dx$ $\qquad (x\cdot e^x)' = e^x + x\cdot e^x$

$= (1+x)\cdot e^x$

$= -\frac{x\cdot e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(1+x)e^x dx =$

$= -\frac{x\cdot e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(1+x)e^x dx = -\frac{x\cdot e^x}{1+x} + e^x + C$

7.) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u}du = \arctan u + C$

$= \arctan(e^x) + C$

$e^{2x} = (e^x)^2$

$u = e^x$

$du = e^x dx = u dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$

$e^{2x} = u^2$

8.) $\int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}dx \overset{\substack{u=\tan x \\ du=\frac{1}{\cos^2 x}dx}}{=\!=\!=} \int \log u\, du$

και

$\int \log u\, du = \int (u)' \log u\, du = u\log u - \int u\cdot\frac{1}{u}du$

$= u\log u - u = \tan x\,(\log(\tan x) - 1) + C.$

9.) $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{(1+u)^2}{\cancel{2}u^2} \cdot \frac{\cancel{2}}{1+u^2}\,du$

$u = \tan\frac{x}{2}$

$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$

$dx = \frac{2du}{1+u^2}$

Ζητάμε a, b, γ, δ :

$$\frac{1+2u+u^2}{u^2(1+u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u^2} + \frac{\gamma u+\delta}{1+u^2}$$

$$\frac{P(x)}{(x-\tau)^4(x^2+\rho x+\sigma)^3} = \frac{a}{x-\tau} + \frac{b}{(x-\tau)^2} + \frac{\gamma}{(x-\tau)^3} + \frac{\delta}{(x-\tau)^4}$$

αρνητική διακρίνουσα $+ \frac{\varepsilon x+\zeta}{x^2+\rho x+\sigma} +$

$$+ \frac{\eta x+\theta}{(x^2+\rho x+\sigma)^2} + \frac{\iota x+\kappa}{(x^2+\rho x+\sigma)^3}$$

$$\frac{1+2u+u^2}{u^2(1+u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u^2} + \frac{\gamma u+\delta}{1+u^2} = \frac{au+au^3+b+bu^2+\gamma}{u^2(1+u^2)}$$

$a+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-2$

$b+\delta=1 \Rightarrow \delta=0$

$a=2$

$b=1$

$= \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{2u}{1+u^2}$

$\int \frac{2}{u}du = 2\ln|u|$

$\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}$

$\int -\frac{2u}{1+u^2} = -\ln(1+u^2)$

10.) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int du = u + C = \sqrt{x^2+1} + C$

$u = \sqrt{x^2+1}$

$du = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} dx$

11.) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int f(u) du$

$f(u) = \sqrt{u^2-1}$

Κάνουμε το ίδιο

$u = \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{x = f(u);} u^2 - 1 = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{u^2-1}$

$du = \frac{x}{x^2+1} dx$

Από την αρχή το $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{(u^2-1)^2}{4u^2} \cdot \frac{2u}{u^2+1} \frac{u^2-1}{2u^2} du$

- $u - x = \sqrt{x^2+1}$
- $u^2 - 2ux + x^2 = x^2 + 1$

  $\Rightarrow x = \frac{u^2-1}{2u}$
- $\sqrt{x^2+1} = u - x = u - \frac{u^2-1}{2u} = \frac{u^2+1}{2u}$
- $dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2u^2}\right) du = \frac{u^2-1}{2u^2} du$

$= \frac{1}{4} \int \frac{(u-1)^3 (u+1)^3}{u^2(u^2+1)} du$

$= \frac{1}{4} \int \Pi(u) du + \frac{1}{4} \int \frac{v(u)}{u^2(u^2+1)} du$

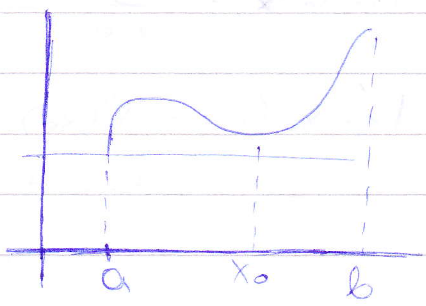
Απλά κλάσματα.

$\rightsquigarrow \int (\sqrt{x^2+1})' \, x \, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1} \, dx$

13/6/2012 31ο μάθημα

Θεώρημα Taylor

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$.
Θεωρούμε $x_0\in(a,b)$ και θέλουμε να προσεγγίσουμε την f όσο καλύτερα γίνεται, κοντά στο x_0, με μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n.
Αυξάνοντας τον βαθμό n του πολυωνύμου ελπίζουμε ότι η προσέγγιση θα γίνεται καλύτερη.



$\underline{n=0}$ Θέλουμε να προσεγγίσουμε την f κοντά στο x_0 με σταθερή συνάρτηση $P_0(x)=f(x_0)$.
(λόγω συνέχειας της f στο x_0, για x κοντά στο x_0 έχουμε $|f(x)-P_0(x)|=|f(x)-f(x_0)|=$ μικρό.

$\underline{n=1}$ Ζητάμε $P_1(x)=$ πολυώνυμο βαθμού 1 που να προσεγγίζει την f καλύτερα κοντά στο x_0.

Απαιτούμε $P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=f'(x_0)$

$P_1(x)=ax+b$ (οι P_1, f έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής κοντά στο x_0)

$\longrightarrow P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

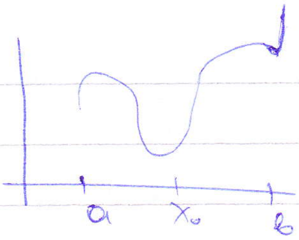
$\underline{n=2}$ Ζητάμε $P_2(x_0)=f(x_0)$, $P_2'(x_0)=f'(x_0)$, $P_2''(x_0)=f''(x_0)$

$$\longrightarrow P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

Ορισμός: (πολυώνυμο Taylor)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in[a,b]$ ώστε να υπάρχουν οι $f^{(k)}(x_0)$, $k=0,1,2,\dots,n$.
Το n-οστό πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το x_0 ορίζεται ως εξής:

$$T_{n,f,x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$



Η βασική ιδιότητα του T_{n,f,x_0} είναι η εξής: για κάθε $k=0,1,\dots,n$ ισχύει

$$\boxed{T_{n,f,x_0}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)} \quad (*)$$

Απόδειξη της (*)

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Για $x = x_0$

$T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0)$

$$T'_{n,f,x_0}(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{n!}\ (n-1)!}\cancel{n}\cdot(x-x_0)^{n-1}$$

Για $x = x_0$

$T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0)$

$$T''_{n,f,x_0}(x) = f''(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{(n-1)!}\ (n-2)!}\cancel{(n-1)}(x-x_0)^{n-2}$$

Για $x = x_0$

$T''_{n,f,x_0}(x_0) = f''(x_0)$

κλπ.

Παρατήρηση: $T_{n-1,f',x_0}(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$

- f n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0
- $T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
- Βασική ιδιότητα: η f και το T_{n,f,x_0} έχουν τις ίδιες παραγώγους (μέχρι τάξης n) στο x_0.
- Ταυτότητα: $\boxed{T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}}$ (*)(*)

Θεώρημα 1: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Δηλ. για x κοντά στο x_0 έχουμε

$$|f(x) - T_{n,f,x_0}(x)| \underset{\text{πολύ μικρότερο}}{<<} |x-x_0|^n$$

μικρό και όλο και πιο μικρό καθώς το n μεγαλώνει

Απόδειξη:

$n=0$ Ζητάμε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{0,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^0} = 0$

Δηλ. $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, ✓ f συνεχής στο x_0

$n=1$ Ζητάμε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0.$ ✓

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλες τις $(n-1)$ φορές παραγωγίσιμες $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ και για το T_{n-1,g,x_0}.

Ζητάμε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$: a.) $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^n = 0.$

b.) $\lim_{x \to x_0} (f(x) - T_{n,f,x_0}(x)) =$
$= f(x_0) - T_{n,f,x_0}(x_0) = 0.$

Θεωρούμε τον λόγο των παραγώγων:

$$\frac{f'(x) - T'_{n,f,x_0}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{λόγω } (\ast\ast)}{=} \frac{1}{n} \frac{f'(x) - T_{n-1,f',x_0}(x)}{(x-x_0)^{n-1}}$$

$\xrightarrow{x \to x_0} 0$ αν εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση για την $g = f'$.

Από de l'Hospital $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Θεώρημα 2: Το T_{n,f,x_0} είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ το οποίο ικανοποιεί το θεώρημα 1.

Λήμμα: Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ με την ιδιότητα και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Τότε $p(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: $n=0$ $p(x) = c$ και $\lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{p(x)} \to c}{\cancel{(x-x_0)} \to 0} = 0 \Rightarrow c = 0.$

Επαγωγικό βήμα: Έστω $n \geq 1$ p πολυώνυμο βαθμού και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Τότε $p(x_0) = \lim_{x \to x_0} p(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}}_{0} \underbrace{(x-x_0)^n}_{0} = 0.$

Τότε, ο x_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου p άρα $p(x) = (x-x_0)\, p_1(x)$ όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$.

Τότε $\frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{(x-x_0)\, p_1(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{p_1(x)}{(x-x_0)^{n-1}}$

Άρα, $\lim_{x \to x_0} \frac{p_1(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Από την επαγωγική υπόθεση για το p_1 έχουμε

$p_1 \equiv 0$ (παντού)

$\Downarrow$

$p(x) = (x-x_0)\, \underbrace{p_1(x)}_{0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη του Θεωρ. 2

Από το Θεώρημα 1, αν $Q(x)=T_{n,f,x_0}(x)$ και $\deg Q \leq n$

τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n}=0$

Έστω ότι υπάρχει και άλλο πολυώνυμο $S(x)$, βαθμού $\leq n$ ώστε

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-S(x)}{(x-x_0)^n}=\varepsilon$

Τότε $\frac{Q(x)-S(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{Q(x)-f(x)}{(x-x_0)^n}+\frac{f(x)-S(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0+0=0$ (από τα προηγούμενα).

Όμως το $p=Q-S$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$.

Από το Λήμμα $p=0 \Rightarrow Q\neq S$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0 και $x_0\in[a,b]$.

Αν $T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$ (*)

και το T_{n,f,x_0} είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ που ικανοποιεί την (*)

Παραδείγματα:

(1) $f(x)=e^x$, $x_0=0$.

Να βρεθεί το T_{n,f,x_0} για κάθε n

(Γενικά, το $T_{n,f,\underset{x_0}{0}}$ λέγεται πολυώνυμο MacLauren της f

$f(x)=e^x$	$f(0)=e^0=1$	Άρα, $T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=$
$f'(x)=e^x$	$f'(0)=e^0=1$	
$f^{(2)}(x)=e^x$	$f^{(2)}(0)=e^0=1$	$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$
$\vdots$	$\vdots$	
$f^{(n)}(x)=e^x$	$f^{(n)}(0)=e^0=1$	

2) $f(x) = \cos x \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = -\sin x \qquad f(0) = 1$

$f''(x) = -\cos x \qquad f'(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = \sin x \qquad f''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = -\sin x \qquad f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(0) = 0$

$$T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$||$

$T_{2n+1,f,0}(x)$

3.) $f(x) = \sin x \quad , x_0 = 0$

(άσκηση) $T_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$||$

$T_{2n+2,f,0}(x)$

4.) $f(x) = \arctan x \quad , x_0 = 0$

Ποιο είναι το $T_{439,f,0}(x)$;

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$f^{(3)}(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x \cdot x^2}{(1+x^2)^4}$

$f^{(4)}(x) = \dots$

$f^{(5)}(x) = \dots$

5.) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$.

Βασίζομαι στην $\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$ αν $|y| < 1$

Άρα, αν $|x|<1$ εφαρμόζοντας την προηγούμενη για $y = -x^2$

έχουμε $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-x^2)}_{y}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$

πολυώνυμο βαθμού $2n$

Θα δείξουμε ότι $T_{2n,f,0} = Q_{2n}$

Με βάση το ΘΕΩΡΗΜΑ, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{f(x) - Q_{2n}(x)}{x^{2n}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Έχουμε $f(x) - Q_{2n}(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} =$

$$= \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$1 + y + \dots + y^n = \frac{1-y^{n+1}}{1-y}$

Έχουμε $\frac{(-1)^{n+1} \cancel{x^{2n+2}}^{\,x^2}}{(1+x^2)\cancel{x^{2n}}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.