$\exists \delta$: αν $x,y \geq 0$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αν $|f(y)-f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(y) \geq f(x_1) - \frac{\varepsilon}{2}$
$> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_0^{x_n} f(x)\,dx \geq \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \int_{x_3-\delta}^{x_3+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\delta + \frac{\varepsilon}{2} 2\delta + \dots + \frac{\varepsilon}{2} 2\delta = n \cdot \delta\varepsilon$$

Άρα $n\delta\varepsilon \leq A \quad \forall n$ (από Αρχιμήδεια ιδιότητα)

1/6/2012 27º μάθημα

50.) $f: [0,\infty) \to (0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής. Αν υπάρχει το $\int_0^\infty f(x)dx = I < \infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

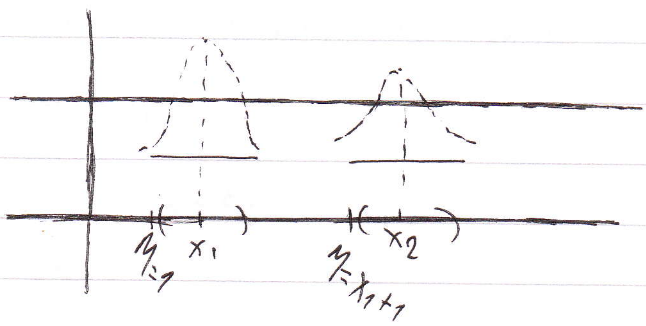
• Έστω ότι δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

• Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $M>0$ υπάρχει $x>M$ ώστε $f(x) \geq \varepsilon$. (*)

- $M=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\ x_1 > 1$ ώστε $f(x_1) \geq \varepsilon$.
- $M = x_1+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\ x_2 > x_1+1$ ώστε $f(x_2) \geq \varepsilon$
- $M = x_2+1 \overset{(*)}{\longrightarrow} \exists\ x_3 > x_2+1$ ώστε $f(x_3) \geq \varepsilon$.

⋮

Δηλ. βρήκαμε $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$ ώστε $\forall n\ x_{n+1} - x_n > 1$
και $\forall n\ f(x_n) \geq \varepsilon$.



ό την ομοιόμορφη συνέχεια της f για τον $\frac{\varepsilon}{2}>0$,
υπάρχει $0<\delta<\frac{1}{4}$ ώστε: αν $x,y\geq 0$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

ε, "για κάθε $n\in\mathbb{N}$ αν $y\in(x_n-\delta, x_n+\delta)$ τότε $f(y)\geq\frac{\varepsilon}{2}$"

ράγματι, $y\in(x_n-\delta, x_n+\delta) \Rightarrow |y-x_n|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow f(y)\geq f(x_n)-\frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

πίσης, αφού $x_{n+1}-x_n>1$ και $\delta<\frac{1}{4}$, ~~για~~
τα $(x_n-\delta, x_n+\delta)$, $(x_{n+1}-\delta, x_{n+1}+\delta)$ δεν τέμνονται:

$$x_{n+1}-\delta > x_n+1-\delta > x_n+\delta.$$

ρουμε $I=\int_0^\infty f(x)\,dx \geq \int_0^{x_n+\delta} f(x)\,dx$

$$=\underbrace{\int_0^{x_1-\delta} f}_{\geq 0}+\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} f+\underbrace{\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} f}_{\geq 0}+\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} f+\dots+\int_{n-1-\delta}^{x_n-\delta} (\geq 0)+\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f \geq$$

$$\geq \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} f+\int_{x_2+\delta}^{x_2-\delta} f+\dots+\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f \geq \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\delta+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\delta+\dots+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\delta=n\cdot\varepsilon\delta.$$

ηλ. $I=\int_0^\infty f(x)\,dx \geq n\cdot\varepsilon\delta$ $\quad\underline{\forall n\in\mathbb{N}}$
η ήταν τυχόν

ΑΤΟΠΟ: το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο από $\frac{I}{\varepsilon\delta}$

② Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Δείξτε ότι $\exists\ (x_n) \nearrow$ (γν. αύξουσα). ώστε το $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ να υπάρχει.

Θεωρούμε τυχούσα (x_n) γν. αύξουσα.
Π.χ. την $x_n = n$.
Τότε, η $(f(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία διότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση.

$\exists\ M>0: \forall\ x\in\mathbb{R}: |f(x)| \le M.$
$\Rightarrow \forall\ n\ |f(x_n)| \le M.$
$\Rightarrow (f(x_n))$ φραγμένη

Από Bolzano-Weierstrass, $\exists\ (x_{k_n})$ υποακολουθία της (x_n) ώστε $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n})$

Ορίζουμε $y_n = x_{k_n}$
a) $\exists \lim f(y_n)$
b.) $(x_n)\nearrow \Rightarrow$ κάθε υπακολουθία της είναι γν. αύξουσα
$\Rightarrow (y_n) = (x_{k_n})$ γν. αύξουσα

25. $a_n > 0$. και $a_n \to 0$
Δείξτε ότι $\exists\ (a_{k_n})$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_n < +\infty$.

Ιδέα: Θα διαλέξω $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
ώστε $3^n a_{k_n} < \frac{1}{n^2}$ $\longrightarrow \sum \frac{1}{n^2} < +\infty.$

$\Updownarrow$

$a_{k_n} < \frac{1}{3^n n^2}$

n=1: Ζητάω $k_1 \in \mathbb{N}$: $a_{k_1} < \frac{1}{3^1 1^2} = \frac{1}{3}$ (υπάρχει $a_n \to 0$)

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1 < \dots < k_s$ ώστε: $\forall\ n = 1, \dots, s$, $a_{k_n} < \frac{1}{3^n n^2}$
Ζητάω $k_{s+1} > k_s$ ώστε $a_{k_{s+1}} < \frac{1}{3^{s+1}(s+1)^2}$

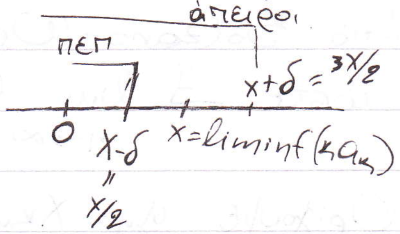
Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{3^{s+1}(s+1)^2}$ $\exists\ n_0: \forall\ n \ge n_0\quad a_n < \varepsilon.$
Διαλέγω $k_{s+1} > \max\{k_s, n_0\}$

Αφού $(k_n)\uparrow$ η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) και

$$\left.\begin{array}{l} a_{k_n} < \frac{1}{3^n\cdot n^2} \Rightarrow 0 < 3^n a_{k_n} < \frac{1}{n^2} \\ \text{και η } \sum \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{σύγκρισης}]{\text{κριτ.}} \sum 3^n a_{k_n} \text{ συγκλίνει.}$$

(22.) Έστω $a_k \geq 0$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $\liminf(k\cdot a_k)=0$.

Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε, $x=\liminf(k\cdot a_k)>0$.



Παίρνω $\delta=\frac{x}{2}$

Ξέρουμε ότι το $\{k\in\mathbb{N}: k\cdot a_k<\frac{x}{2}\}$ είναι πεπερασμένο.

$\Rightarrow$ όλοι τελικά οι όροι $k\cdot a_k > \frac{x}{2}$

δηλ. $\exists k_0\in\mathbb{N}: \forall k\geq k_0 \quad k\cdot a_k>\frac{x}{2} \Rightarrow a_k \geq \frac{(x/2)}{k}$ (*)

Έχουμε ότι η $\sum a_k$ συγκλίνει

$$\xRightarrow[\text{κρ. σύγκρισης}]{(*)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)}{k} \text{ συγκλίνει.}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ συγκλίνει} \quad \text{ΑΤΟΠΟ.}$$

⑥ Να βρεθούν το liminf και το limsup της $\delta_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$

$n = 3k$
$n = 3k+1$
$n = 3k+2$

$$\delta_{3k} = \frac{3k}{3} - \left[\frac{3k}{3}\right] = k - [k] = k - k = 0 \to 0.$$

$$\delta_{3k+1} = \frac{3k+1}{3} - \left[\frac{3k+1}{3}\right] = k + \frac{1}{3} - \left[k + \frac{1}{3}\right] = k + \frac{1}{3} - k \to \frac{1}{3}$$

$$\delta_{3k+2} = \frac{3k+2}{3} - \left[\frac{3k+2}{3}\right] = k + \frac{2}{3} - \left[k + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}$$

Τότε K = το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων της $(\delta_n) = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$

Άρα, $\liminf \delta_n = 0$, $\limsup \delta_n = \frac{2}{3}$

(*) Έστω $x \in K$. Δείχνουμε ότι $x = 0$ ή $x = \frac{1}{3}$ ή $x = \frac{2}{3}$

$\Downarrow$

Τότε $\exists\ \delta_{k_n} \to x$.

- Η δ_{k_n} έχει άπειρους όρους: τα k_n είναι άπειροι το πλήθος.
- Κάθε k_n $\in \{3k : k \in \mathbb{N}\}$
  ή $\in \{3k+1 : k \in \mathbb{N}\}$
  ή $\in \{3k+2 : k \in \mathbb{N}\}$

- Άρα άπειροι k_n είναι της μορφής $3k$
  ή — " — $3k+1$
  ή — " — $3k+2$

Αν άπειροι $k_n \in \{3k : k \in \mathbb{N}\}$ τότε $\exists\ \delta_{k_{\lambda_n}}$ ώστε όλα τα $k_{\lambda_n} \in \{3k : k \in \mathbb{N}\}$

Τότε $\delta_{k_{\lambda_n}}$ κοινή υπακολουθία του δ_{k_n} και δ_{3k}. Τότε $\delta_{k_{\lambda_n}} \to x$ και $\delta_{k_{\lambda_n}} \to 0$

Τότε $x = 0$

(27) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια

(α.) $f: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

(β.) $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

(γ.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \cos x$

(δ.) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

(β.) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x}\ln x \overset{\|}{=} \sqrt{1}\cdot\ln 1 \overset{\|}{=} 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \ln x \overset{\|}{=} 0$ $\quad$ $\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{3/2}}} = -\dfrac{2x\sqrt{x}}{x} \xrightarrow{x\to 0^+} 0$

(α.) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ τότε η $f: [2,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής (το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά).

Εδώ, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+4} = 0$.

(γ.) $f(x) = x\cdot\cos x$ / $f'(x) = \cos x - x\cdot\sin x$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ

$f'(2n\pi+\frac{\pi}{2}) = -(2n\pi+\frac{\pi}{2}) \to -\infty$. ΠΑΡΑΓΩΓΟ.

$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y_n - x_n = \varepsilon_n \to 0$

$y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{\downarrow\, 0}{\varepsilon_n}$

$f(y_n) - f(x_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n)\underbrace{\cos(\cancel{2n\pi} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n)}_{= -\sin\varepsilon_n} - (2n\pi + \frac{\pi}{2})\cos(2n\pi + \frac{\pi}{2})$

$- 2\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - \underbrace{\frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 2\pi \neq 0.$

(11-12) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά:

$$-\sum \frac{(k!)^2}{(2k)!} \Big/ \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[(k+1)!]^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2 \cdot \frac{(2k)!}{(2k)!(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \to \frac{1}{4} < 1$$

Άρα συγκλίνει.

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$ Εναλλάσσουσα και η $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0$.

Από το κριτήριο Leibniz συγκλίνει.

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k} \Big/ \quad \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{(\ln k)^k}} = \frac{1}{\ln k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1.$$

Άρα συγκλίνει.

Αν $k \geq 10$ τότε $\ln k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{(\ln k)^k} \leq \frac{1}{2^k}$ και η $\sum \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{κριτήριο σύγκρισης}}$ Η σειρά συγκλίνει.

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(kx)}{k^2}}_{a_k} \Big/ \quad \underbrace{\left|\frac{\cos(x)}{k^2}\right|}_{|a_k|} \leq \frac{1}{k^2} \xrightarrow{\text{κριτήριο σύγκρισης}} \sum |a_k| \text{ συγκλίνει}$$

$\Downarrow$

$\sum a_k$ συγκλίνει.

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \Big/ \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \overset{\substack{y=\ln x \\ dy=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = -\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{\ln 2}$$

φθίνουσα και $a_k = f(k)$ $\xrightarrow{\text{κριτήριο ολοκληρώματος}}$ Η σειρά συγκλίνει.

6/6/2012 $\quad$ 28º μάθημα

Τεχνικές ολοκλήρωσης

Μας δίνουν την f και ζητάμε παράγουσα της f. Δηλ. συνάρτηση F ώστε $F' = f$ $\left(F(x) = \int f(x)\,dx\right)$

(I) Ένας πίνακας με βασικά ολοκληρώματα

- $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$

π.χ. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$, $\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}dx$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

(II) Αντικατάσταση (α' είδους)

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx \underset{du = \phi'(x)dx}{\overset{u=\phi(x)}{=\!=}} \int f(u)\,du$$

Αν αυτό υπολογίζεται και είναι μια συνάρτηση F, τότε το αρχικό ολοκλ. είναι η $F(u) = F(\phi(x))$

$(F\circ\phi)' = (F'\circ\phi)\phi' = (f\circ\phi)\cdot\phi'$

Παραδείγματα

1) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

$\phi(x) = \arctan x$

$\frac{1}{1+x^2} = \phi'(x)$

$f(u) = u \rightsquigarrow f(\phi(x)) = \arctan x$

$$\underset{\substack{u=\arctan x \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx}}{=} \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{(\arctan x)^2}{2} + c$$

2) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$u = \sin x \quad du = \cos x\,dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{u}{1-u^2}\,du$

$v = \cos x$

$dv = -\sin x\,dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dv}{v} =$

$= -\ln|v| + c = -\ln|\cos x| + c.$

3) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \quad \underset{du = \frac{1}{2x}dx}{\overset{u=\sqrt{x}}{=}} \quad \int 2\cos(u)\,du = -2\sin u + c$

$= -2\sin(\sqrt{x}) + c$

III) Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

a) Χρήσιμες ταυτότητες

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

(αποτετραγωνισμού)

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1.$

Αυτές προκύπτουν από την $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Επίσης $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

- Τριγων. αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\Rightarrow$

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

Παραδείγματα:

1.) $\int \cos^2 x\, dx \xrightarrow{\text{αποτε}} \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

2.) $\int \sin^5 x\, dx = \int \underset{\downarrow \atop (1-\cos^2 x)^2}{\sin^4 x} \cdot \sin x\, dx \xrightarrow[du=-\sin x dx]{u=\cos x} -\int (1-u^2)^2\, du$

$= -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = -\cos x + 2\frac{(\cos x)^3}{3} - \frac{(\cos x)^5}{5} + c.$

3.) $\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \cos x\, dx$
$= \int (1-\sin^2 x) \sin^4 x \cos x\, dx$
$\xrightarrow[du=\cos x dx]{u=\sin x} \int (1-u^2)\, du$ κλπ.

4.) $\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + c$ (διότι $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$)

5.) $\int \cot^2 x\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\cot x - x + c$ (διότι $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin x}$)

IV Αντικατάσταση (β' είδους)

$\int f(u)\, du \xrightarrow[du=\phi'(x)dx,\ x=\phi^{-1}(u)]{u=\phi(x)} \int f(\phi(x))\, \phi'(x)\, dx$

Αν υπολογίσω αυτό και είναι μια συνάρτηση $F(x)$ τότε
$\int f(u)\, du = F(\phi^{-1}(u))$.

Παραδείγματα

α) Ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2-u^2}$ πχ. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{9-u^2}}$

Θέλουμε $u=a\sin x$

$du = a\cos x\, dx$

$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 x)} = \sqrt{a^2\cos^2 x} = a\cos x.$

$u = 3\sin x$ $\quad \int \frac{3\cos x\, dx}{9\sin^2 x \cdot 3\cos x} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cot x}{9}$

Πρέπει τέλος να γράψουμε την $\cot x$ σαν συνάρτηση του u:

Έχουμε $u = 3\sin x \Rightarrow \sin x = \frac{u}{3}$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{u^2}{9}} = \sqrt{\frac{9-u^2}{3}}$

Άρα, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{9-u^2}}{u}$

Τελικά, $\int \frac{du}{u^2\sqrt{9-u^2}} = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-u^2}}{u}$

β) Ολοκληρώματα με $\sqrt{u^2-a^2}$

Κάνουμε την αντικατάσταση $\boxed{u = \frac{a}{\cos x}}$

- $u^2 - a^2 = a^2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = a^2 \tan x$

$\Rightarrow \sqrt{u^2-a^2} = a\tan x$

- $du = -\frac{a\sin x}{\cos^2 x} dx.$

Παράδειγμα

$$\int \frac{\sqrt{u^2-4}}{u}\,du$$

$u = \frac{2}{\cos x} \rightsquigarrow \sqrt{u^2-4} = \sqrt{4\frac{1}{\cos^2 x}-1} = \sqrt{4\tan^2 x} = 2\tan x$

$du = -\frac{2}{\cos^2 x}(-\sin x)\,dx = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt{u^2-4}}{u}\,du = \int \frac{2\tan x}{\frac{2}{\cos x}}\cdot\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x\cdot \sin x}{\cos x}\cdot\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= 2\int \tan^2 x\,dx = 2\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = 2(\tan x - x) + c.$$

Πρέπει τέλος να γράψουμε την $2(\tan x - x)+c$ σαν συνάρτηση του u

$\tan x = \frac{1}{2}\sqrt{u^2-4}$

$x \mid \cos x = \frac{2}{u} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{2}{u}\right)$

$\rightarrow = \sqrt{u^2-4} - 2\arccos\left(\frac{2}{u}\right) + c$

γ.) Ολοκληρώματα με $\sqrt{u^2+a^2}$

$u = a\tan x \quad \sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 x+1)} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x}} = \frac{a}{\cos x}$

$du = \frac{a}{\cos^2 x}$

Παράδειγμα:

$$\int \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^4}\,du = \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}{\tan^4 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$$

$\frac{\sin x}{\cos x}$

$u = \tan x \quad \sqrt{u^2+1} = \sqrt{\tan^2 x+1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$

$du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$z = \sin x$

$dz = \cos x\, dx$

$$\int \frac{dz}{z^4} = -\frac{1}{3z^3} + c = -\frac{1}{3\sin^3 x} + c = -\frac{(u^2+1)^{3/2}}{3u^3} + c.$$

$$u = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{u^2+1} \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\int z^{-4} = \frac{z^{-3}}{-3}$$

(V) Ολοκλήρωση κατά μέρη (κατά παράγοντες)

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x).$$

Παραδείγματα

(1.) $$\int x \log x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x^2}{2} (\log x)' dx$$
$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

(2) $$\int x \cos x \, dx = \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int (x)' \sin x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$
$$= x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

(3.) $$\int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' dx$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx.$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$
$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

4.) $\int x\sin^2 x\,dx = \int x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

και $\int x\cos 2x\,dx = \int x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx = \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$

$= \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x$

Τελικά, $\int x\sin^2 x = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c.$

5.) $\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int \log\left(\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\right)dx = \int \log(\sqrt{x})\,dx + \int \log(\sqrt{x}+1)\,dx$

Για το $\int \log(\sqrt{x})\,dx$: $u = \sqrt{x}$ $\longrightarrow 2\int u\log u\,du.$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}\,du$

Για το $\int \log(\sqrt{x}+1)\,dx$: $u = \sqrt{x}+1$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2(u-1)\,du$

$\longrightarrow 2\int (u-1)\log u\,du$

Αλλιώς: $\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\log(x+\sqrt{x})\,dx = x\log(x+\sqrt{x})$

$- \int x\,\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}\,dx$

$= -\int \frac{(2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx$

$\sqrt{x} = u$ και γίνεται ρητό.

Ασκήσεις :

2(δ) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

$u=\sqrt{1+e^x} \to u^2 = 1+e^x \Rightarrow e^x = u^2-1$

$du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx = \frac{u^2-1}{2u}\,dx$

$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{2u}{u^2-1}\,du}$

$\int \frac{2u}{u^2-1}\cdot\frac{1}{u}\,du$

$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u+1)\cdot(u-1)} = \frac{a}{u+1}\cdot\frac{b}{u-1}$

$a(u-1)+b(u+1)=1$

$\Rightarrow (a+b)u + (b-a) = 1$

$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ b-a=1 \end{array}\right\} \quad b=\frac{1}{2}, \quad a=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{u-1}$

Άρα $\int \frac{2}{u^2-1}\,du = -\int\frac{du}{u+1} + \int\frac{du}{u-1} = -\ln|u+1| + \ln|u-1| = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$

2(β) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5\,du}{u^3+u^2} = \int \frac{6u^3\cdot u^2}{u^2(u+1)}\,du = 6\int\frac{u^3}{u+1}\,du \overset{z=u+1}{\underset{du=dz}{=}}$

$u=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x = u^6 \Rightarrow du = 6u^5\,du$

$\sqrt{x}=u^3$

$\sqrt[3]{x}=u^2$

$= 6\int\frac{(z-1)^3}{z}\,dz$

$= 6\int\left(z^2-3z+3-\frac{1}{z}\right)dz$

$= 6\left(\frac{z^3}{3} - 3\frac{z^2}{2} + 3z - \ln|z|\right)$

...

8/6/2012 29º μάθημα

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int R(x)dx$, όπου $R(x)$ ρητή συνάρτηση

δηλ. $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Αυτά υπολογίζονται πάντα (υπάρχει μέθοδος)

1) Αν $deg(p) \geq deg(q)$ τότε υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x), r(x)$. ώστε

$$p(x) = \pi(x)q(x) + r(x), \quad deg(r) < deg(q)$$

οπότε

$$\int R(x)dx = \int \left[\pi(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right]dx = \int \pi(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx, \quad deg(r) < deg(q)$$

υπολογίζεται

Αρκεί να ξέρω να υπολογίζω αυτά

2) Έστω $p(x) = p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0$, $n < m$

$q(x) = \tau_m x^m + \dots + \tau_1 x + \tau_0$

Μπορώ να υποθέσω ότι $p_n = \tau_m = 1$ γιατί $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_n}{\tau_m}\int \frac{x^n + \dots + \frac{p_1}{p_n}x + \frac{p_0}{p_n}}{x^m + \dots + \frac{\tau_1}{\tau_m}x + \frac{\tau_0}{\tau_m}}$

Το $q(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων: $q(x) = (x-a_1)^{t_1}\dots(x-a_r)^{t_r}(x^2+b_1x+\gamma_1)^{t_1}\dots(x^2+b_sx+\gamma_s)^{t_s}$ (*)

Σημείωση: κάθε ζευγάρι συζυγών μιγαδικών ριζών $\bar{z}, z$ του $q(x)$ μου δίνει έναν όρο $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + |z|^2$

έχει αρνητική διακρίνουσα.

(*) όπου κάθε $x^2 + b_i x + \gamma_i$

έχει μιγαδικές ρίζες, δηλ. $b_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Άρα έχουμε να ολοκληρώσουμε την $x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$

$$(x-a_1)^{t_1} \dots (x-a_r)^{t_r} (x^2+b_1x+\gamma_1)^{l_1} \dots (x^2+b_sx+\gamma_s)^{l_s} \quad (*)$$

γράφεται
$$\frac{\delta_{11}}{x-a_1} + \frac{\delta_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\delta_{1t_1}}{(x-a_1)^{t_1}}$$
$$+ \dots + \frac{\delta_{r1}}{x-a_r} + \frac{\delta_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{\delta_{rt_r}}{(x-a_r)^{t_r}}$$
$$+ \frac{A_{11}x+B_{11}}{x^2+b_1x+\gamma_1} + \frac{A_{12}x+B_{12}}{(x^2+b_1x+\gamma_1)^2} + \dots + \frac{A_{1l_1}x+B_{1l_1}}{(x^2+b_1x+\gamma_1)^{l_1}}$$
$$+ \dots + \frac{A_{s1}x+B_{s1}}{(x^2+b_sx+\gamma_s)} + \frac{A_{s2}x+B_{s2}}{(x^2+b_sx+\gamma_s)^2} + \dots + \frac{A_{sl_1}x+B_{sl_1}}{(x^2+b_sx+\gamma_s)^{l_1}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Υπάρχουν σταθερές $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1t_1}, \dots, \delta_{r1}, \delta_{r2}, \dots, \delta_{rt_r}, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1t}, B_{11}, \dots, B_{1l_1}$ ώστε για κάθε x να ισχύει η $(*)$

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί το $\displaystyle \int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$

· Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή:
$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1)$$
$$= (x-1)(x^4+2x^2+1) = (x-1)(x^2+1)^2$$

· Υπάρχει ανάλυση σε απλά κλάσματα:
$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\delta}{x-1} + \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+1)^2}$$

· Βρίσκουμε τους συντελεστές
$$x+1 = \delta(x^2+1)^2 + (Ax+B)\underbrace{(x-1)(x^2+1)}_{x^3-x^2+x-1} + (\Gamma x+\Delta)(x-1)$$
$$= \delta x^4 + 2\delta x^2 + \delta + Ax^4 - Ax^3 + Ax^2 - Ax + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B$$
$$+ \Gamma x^2 + \Delta x - \Gamma x - \Delta.$$

$\Rightarrow$ Σύστημα: $\delta + A = 0$ | $\delta = -A$

$-A + B = 0$ | $B = A$

$2\delta + A - B + \Gamma = 0$ | $-A - A + \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = 2A$

$-A + B + \Delta - \Gamma = 1$ | $\Delta - \Gamma = 1$ | $\Delta - 2A = 1$

$\delta - B - \Delta = 1$ | $-2A - \Delta = 1$ | $-A - 2A = 1$ $\Big\} -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta = 0$

$\delta = \frac{1}{2}$

$B = A = -\frac{1}{2}$

$\Gamma = -1$

$\Delta = 0$

Δηλ. ψάχνουμε το $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx.$

-ΘΕΩΡΙΑ- Τελικά θα εμφανιστούν ολοκληρώματα της μορφής

1.) $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ 2.) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+\gamma)^k}$

$\hookrightarrow$ διακρίνουσα < 0

(1.) $\cdot\ k \neq 1$ — $-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$

$\int (x-a)^{-k}$

$\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}$

$\cdot\ k = 1$ — $\ln|x-a| + c$

(2.) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+b) + (B - \frac{AB}{2})}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx$

$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx + (B - \frac{Ab}{2})\int \frac{1}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx.$

Για το $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx \xrightarrow[dy=(2x+b)dx]{y=x^2+bx+\gamma} \int \frac{dy}{y^k} = \Bigg| \begin{array}{l} -\frac{1}{(k-1)y^{k+1}} \quad k \neq 1 \\ \ln|y|, \ k=1 \end{array}$

και βάζουμε όπου y το $x^2+bx+\gamma$

Για το $\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx = \frac{1}{\left[(x+\frac{\beta}{2})^2+(\gamma-\frac{\beta^2}{4})\right]^k}dx$

$= \frac{1}{(\gamma-\frac{\beta^2}{4})^k}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}\right)^2+1\right]^k}dx = \sigma\tau\alpha\theta. \cdot \int \frac{1}{(y^2+1)^k}$

y

Αν ξέρω να βρίσκω αυτό για κάθε κ έχω τελειώσει.

Στο παράδειγμα:

(1) $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|$

(2.) $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{x^2+1}dx$

$\underset{y=x^2+1}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x$

Βασική άσκηση (4)

Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}}_{I_{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}}_{I_n}$$

Ξεκινάμε από το $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int (x)'\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$

$\underset{\text{κατά μέρη}}{\overset{\text{ολοκλ.}}{=}} \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int x\left((x^2+1)^{-n}\right)'dx$

$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left[\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx\right]$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(I_n - I_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow 2n I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) I_n \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Χρησιμότητα: Ξέρουμε το $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$

Τότε $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + c.$

$$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan x + c$$

$$I_4 = \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{6} I_3 = \dots$$

Παράδειγμα:

$$\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx = \int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$$

$$x^3+3x^2-4 = x^3-1+3x^2-3$$
$$= (x-1)(x^3+x+1)+3(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2+4x+4)$$
$$= (x-1)(x+2)^2$$

Ζητάμε a, b, γ ώστε

$$\frac{5x^2-12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{\gamma}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{a(x+2)^2 + b(x-1)(x+2) + \gamma(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (4a+b+\gamma)x + (4a-2b-\gamma)}{(x-1)(x+2)^2}$$

Λύνω το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} a+b&=5 \\ 4a+b+\gamma&=12 \\ 4a-2b-\gamma&=1 \end{aligned}\right\} a=2,\ b=3,\ \gamma=1.$$

Άρα, $I = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} = 3\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c$

Ρητά ολοκληρώματα του $\sin x, \cos x$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ | $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ P, Q πολυώνυμα.

πχ. $\frac{\sin^2 x + 7\cos x}{6 + 5\sin^3 x}$ | $\frac{u^2+7v}{6+5u^3}$

Αυτά υπολογίζονται όλα

Μέθοδος: Κάνουμε την αντικατάσταση $\boxed{u = \tan\frac{x}{2}}$

Τότε

(1.) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2u}{u^2+1}}$

(2.) $\cos x = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1-u^2}{1+u^2} = \cos x}$

$1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$

(3.) $u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2\cos^2 x/2}dx = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{u^2+1}du}$

Άρα, $\int R(\sin x, \cos x)\,dx \overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=} \int \underbrace{R\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{u^2+1}}_{\text{ρητή συνάρτηση του } u}\,du$

ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ

Παραδείγματα:

1. $$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \;\underset{}{\overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=}}\; \int \frac{1+\frac{2u}{u^2+1}}{1-\frac{1-u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{u^2+1}\,du$$

$$=\int \frac{\frac{u^2+2u+1}{u^2+1}}{\frac{2u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{u^2+1}\,du=\int\frac{(u+1)^2}{u^2(u^2+1)}\,du$$

Υπολογίζουμε το $\int \frac{u^2+2u+1}{u^2(u^2+1)}\,du$

Ζητάμε a,b,γ,δ : $\frac{u^2+2u+1}{u^2(u^2+1)}=\frac{a}{u}+\frac{b}{u^2}+\frac{\gamma u+\delta}{u^2+1}$

$\int\frac{a}{u}\,du=a\ln|u|$ $\qquad \frac{\gamma}{2}\int\frac{2u}{u^2+1}+\int\frac{\delta}{u^2+1}$

$\int\frac{b}{u^2}\,du=-\frac{b}{u}$ $\qquad =\frac{\gamma}{2}\ln(u^2+1)+\delta\arctan u.$

2. $$\int\frac{x}{1+\sin x}\,dx \;\overset{u=\tan\frac{x}{2}}{\underset{\substack{\frac{x}{2}=\arctan x\\ x=2\arctan x}}{=\!=\!=}}\; \int\frac{2\arctan x}{1+\frac{2u}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{u^2+1}\,du=4\int\frac{\arctan x}{(u+1)^2}\,du$$

$$=4\int\arctan u\cdot\left(-\frac{1}{u+1}\right)'du$$

$$=-\frac{4\arctan u}{u+1}+4\underbrace{\int\frac{1}{(u^2+1)(u+1)}\,du}_{\text{ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ.}}$$

Παρατήρηση:

$\int\arctan x\,\underbrace{\boxed{f(x)}}_{F'}\,dx$

$\int\ln x\cdot\underbrace{\boxed{g(x)}}_{G'}\,dx$