25/5/2012 24º μάθημα

Ολοκλήρωση κατά μέρη

Θεώρημα: Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες. Αν οι f', g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Αποδ.

Θεωρούμε την $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$G(x)=f(x)g(x)$$

Τότε, η G είναι παραγωγίσιμη και

$$G'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

> **Δεύτερο Θεμ. Θεωρ.**
> Αν η G είναι παρ. στο $[a,b]$ και η G' είναι ολοκλ. τότε
> $\int_a^b G'(t)dt = G(b)-G(a)$

Η G' είναι ολοκληρώσιμη, γιατί οι $\underbrace{f,g}_{\text{συνεχείς}}, \underbrace{f',g'}_{\text{ολοκλ.}}$ είναι ολοκληρώσιμες.

Άρα, $G(b)-G(a)=\int_a^b G'(x)dx.$

$$\Rightarrow f(b)g(b)-f(a)g(a) = \int_a^b [f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]dx$$

$$=\int_a^b f(x)g'(x)dx+\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα $\int x\ln x = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x = \frac{x^2\ln x}{2} - \underbrace{\int\frac{x^2}{2}(\ln x)'}_{\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}$

Άσκηση: (δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκλ. λογισμού)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη
Τότε, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Ιδέα: $F'\equiv f$ (f συνεχής)
Αν $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$
(το αόριστο ολοκλήρωμα της f) τότε
$\int_a^{\xi} f(x)\,dx = F(\xi)$ και
$\int_{\xi}^b f(x)\,dx =$
$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{\xi} f(x)\,dx$
$= F(b) - f(\xi)$

$F(a)=0$

Ζητάμε ξ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b)-F(\xi))$$

$$\| $$

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Άρα ζητάμε ξ ώστε:

$$F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx = g(a)F(\xi) + g(b)F(b) - g(b)F(\xi)$$

Δηλ. $\boxed{\int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(\xi)(g(b)-g(a))}$ ← αρκεί να βρούμε $\xi\in[a,b]$ ώστε

$\| \int_a^b g(x)\,dx$

Πρώτο Θεωρ. μέσης τιμής. Αν $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο και ολοκλ.

$$\Rightarrow \exists\, \xi: \int_a^b u(x)v(x)\,dx = u(\xi)\cdot\int_a^b v(x)\,dx$$

Το εφαρμόζω με: $u = F$ - συνεχής

$v = g'$ - συνεχής

και g' διατηρεί πρόσημο γιατί η g είναι μονότονη.

5.14) Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx}_{\gamma_n} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx}_{\delta_n} = 0$$

(Λήμμα Riemann Lebesgue: το συμπέρασμα ισχύει και με ασθενέστερη υπόθεση για την f πχ. συνεχής ή ολοκληρώσιμη).

Για την γ_n: Γράφουμε

$$\gamma_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \int_a^b f(x)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)' dx$$

κατά λέξη $$- \frac{f(b)\cos(nx)}{n} + \frac{f(a)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx \to 0$$

Έχουμε: $|f(b)\cos(nb)| \leq |f(b)|$ γιατί $\cos(nb) \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| -\frac{f(b)\cos nb}{n} \right| \leq \frac{f(b)}{n} \to 0$$

$$\left| \frac{f(a)\cos(na)}{n} \right| \leq \frac{|f(a)|}{n} \to 0$$

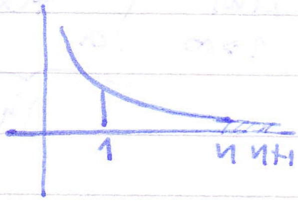
$$\left| \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx \right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)||\cos(nx)|\,dx \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|dx \to 0$$

4.24) Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ $= \ln n$

(Ξέρουμε ότι $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n - \cancel{\ln 1}$)

<u>Μονοτονία της (γ_n):</u>

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx - \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$



$$= \frac{1}{n+1} - \left(\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right)$$

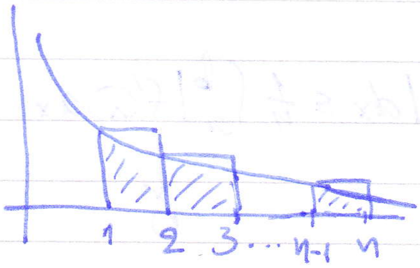
$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

Παρατηρούμε ότι: $n \le x \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \ge \frac{1}{n+1}(n+1-n) = \frac{1}{n+1}$$

Συνεπώς, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \le 0$ για κάθε n.
Άρα, η (γ_n) είναι φθίνουσα.

Θα δείξουμε ότι $\gamma_n \ge 0$ για κάθε n (οπότε (γ_n) φθίνουσα + κάτω φρ. + άρα συγκλίνουσα)



Έχουμε

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$\le \frac{1}{1}(2-1) + \frac{1}{2}(3-2) + \dots + \frac{1}{n-1}(n-(n-1))$$

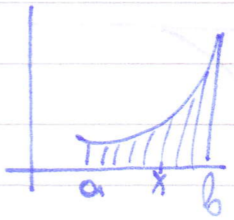
Δηλ. $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \le 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1} < 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \gamma_n > 0.$

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Θέλουμε να ορίσουμε το $\int f(x)\,dx$, όπου $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ ή $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ή $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Ορισμός: Έστω $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (το b μπορεί να είναι στο $\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$) η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,x]$, $a<x<b$.

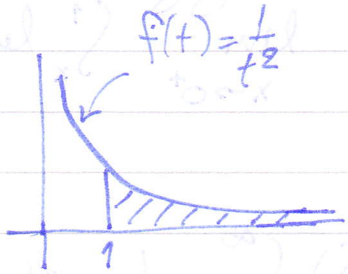


Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt$.

(Θα το λέμε γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b)$).

Παραδείγματα:

(α) $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}$ Παίρνουμε $x>1$ και υπολογίζουμε το $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$



Έχουμε $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right)' dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x$

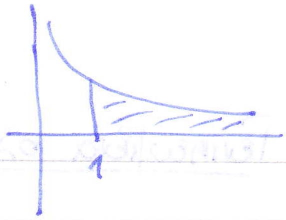
$$= -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

~~έχουμε~~

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$,

έχουμε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$

(β.) $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$

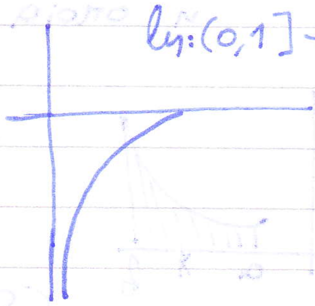


Παίρνω $x>1$: $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x (\ln t)'\,dt = \ln x - \ln 1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$.

Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ "αποκλίνει στο $+\infty$"

(γ.) $\int_0^1 \ln t\,dt$

$\ln : (0,1] \to \mathbb{R}$



Παίρνουμε $0<x<1$ και υπολογίζουμε το

$$\int_x^1 \ln t\,dt = \int_x^1 (t')\ln t\,dt$$

$$= t\ln t\Big|_x^1 - \int_x^1 t\cdot\frac{1}{t}\,dt = (t\ln t - t)\Big|_x^1 = -1 - x\ln x + x.$$

Υπολογίζουμε το

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \ln t\,dt = \lim_{x\to 0^+} (1 - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x\ln x} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}) = -1$$

$x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$

(δ.) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

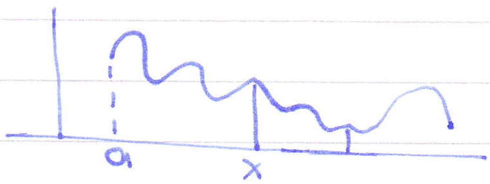
Ξέρουμε ότι $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$

Παίρνουμε $x>0$: $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t\Big|_0^x$

$$= \arctan x - \cancel{\arctan 0} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση: Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ μη αρνητική, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, $x>a$.

Τότε, η $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ είναι αύξουσα



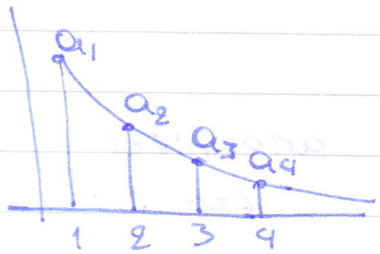
(αν $x<y$ τότε $F(y)-F(x)=\int_x^y f(x)\,dt \geq 0$)

Τότε το $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η F είναι φραγμένη

Άρα, το $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ η F είναι φραγμένη

(Αντίστοιχο για σειρές: αν $a_k \geq 0$ τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η (S_n) είναι φραγμένη).

Θεώρημα: (κριτήριο ολοκληρώματος)
Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα. Ορίζουμε:
$a_k=f(k)$, $k=1,2,3,\dots$



Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ το $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ υπάρχει.

(Σημ: η (a_k) θα είναι φθίνουσα γιατί η f είναι φθίνουσα)

Παραδείγματα:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $(p>0)$ | Θεωρώ την $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$
Τότε $f(k)=\frac{1}{k^p}$ // Η f είναι φθίνουσα γιατί $p>0$

Εξετάζω το $\int_1^{+\infty} t^{-p}\,dt$

Έχω $\int_1^x \underset{f(t)}{\underbrace{t^{-p}}}dt = \frac{t^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^x = -\frac{x^{-p+1}}{-p+1}$ συγκλίνει στο 0 αν $-p+1<0$.

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{1-p}$ αν $p>1$
(αλλιώς απειρίζεται)

Υπάρχει αν $p>1$
όχι αν $p<1$.

(β.) $\sum \frac{1}{k}$ / $f(t)=\frac{1}{t}\downarrow$

$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ Άρα, δεν υπάρχει το

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \xRightarrow[\text{κριτήριο}]{} \sum \frac{1}{k} = +\infty.$

(γ.) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot \ln k}$ / $f(t)=\frac{1}{t\cdot \ln t}\downarrow$, $t\in[2,+\infty)$

$\int_2^x \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_2^x \frac{(\ln t)'}{\ln t}\,dt \overset{y=\ln t}{=\!=} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y} = \ln \frac{dy}{y}\Big|_{\ln 2}^{\ln x}$

$= \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \longrightarrow +\infty.$

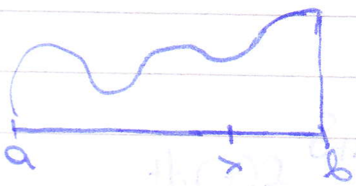
Άρα, το $\int_2^{\infty} \frac{1}{t\ln t}\,dt = +\infty \xRightarrow[\text{κρ. ολοκλ.}]{}$ η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

28/5/2012 25º μάθημα

Ασκήσεις (κεφ.5).

5.1 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[a,b]$ ώστε $\int_a^s f(t)dt=\int_s^b f(t)dt$. (μπορούμε πάντα να διαλέγουμε $s\in(a,b)$).

Ορίζουμε $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$.



$$=\int_a^x f(t)dt-\left(\int_a^b f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)$$

$$=\underbrace{2\int_a^x f(t)dt}_{\text{συνεχής}}-\int_a^b f(t)dt$$

Η F είναι συνεχής (γιατί η $x\mapsto\int_a^x f$ είναι συνεχής)

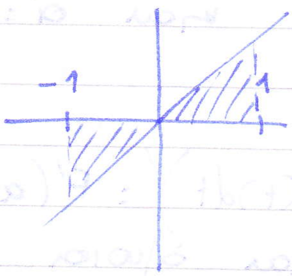
$F(a)=2\cdot 0-\int_a^b f$ $\quad F(b)=2\int_a^b f-\int_a^b f=\int_a^b f$

Άρα, $F(a)=-F(b) \Rightarrow F(a)F(b)=-F(b)^2\leq 0$

$\Rightarrow \exists\, s\in[a,b]:F(s)=0$

$\Rightarrow \int_a^s f=\int_s^b f.$

Στην ερώτηση: ΟΧΙ



$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$

$\int_{-1}^1 f(t)dt=0$ Αν για κάποιους έχουμε

$F(s)=0 \Rightarrow 2\int_{-1}^s f(t)dt-\int_{-1}^1 f(t)dt=0$

$\Rightarrow \int_{-1}^s t\,dt=0 \Rightarrow \frac{s^2-(-1)^2}{2}=0 \Rightarrow s=\pm1$

5.4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$ για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι $f\equiv 0$ στο $[0,1]$.

Έχουμε $\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \quad \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow 2\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt \quad \forall x\in[0,1]$

Δηλ. η $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι σταθερή $= \frac{\int_0^1 f}{2}$.
Έχουμε $F'(x) = f(x)$ $\forall x$ (γιατί f συνεχής).
$F'(x) = 0$ (γιατί F σταθερή)
Άρα, $f(x) = 0 \quad \forall x\in[0,1]$.

5.6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έστω $\delta>0$. Ορίζουμε $g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt$
Βρείτε την g' (και δείξτε προηγουμένως ότι g παραγωγίσιμη)

Γράψαμε $g(x) = \int_0^{x+\delta} f(t)dt + \int_{x-\delta}^0 f(t)dt = \int_0^{x+\delta} f(t)dt - \int_0^{x-\delta} f(t)dt$

Τότε $\int_0^{x+\delta} f(t)dt = F(x+\delta) = (F\circ a)(x)$

$\int_0^{x-\delta} f(t)dt = F(x-\delta) = (F\circ b)(x)$
είναι παραγ ως σύνθεση παρ
και $a'=1$, $b'=1$.

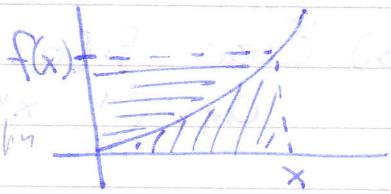
Αν $F(x) = \int_0^x f$
η F είναι παραγ
με $F'=f$
Αν $a(x) = x+\delta$
$b(x) = x-\delta$
παρ

$\left(\int_0^{x+\delta} f(t)dt\right)' = F'(a(x))\cdot a'(x) = f(a(x))\cdot 1 = f(x+\delta)$
και όμοια
$\left(\int_0^{x-\delta} f(t)dt\right)' = f(x-\delta)$.

Άρα $g'(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$

5.11) Έστω $f:[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0)=0$. Δείξτε ότι $\forall\ x>0$

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = x\cdot f(x).$$



Ορίζουμε $G:[0,+\infty)$ με

$$G(x) = \underbrace{\int_0^x \underbrace{f(t)}_{\text{συν}}\,dt}_{\text{παρ}} + \int_0^{f(x)} \underbrace{f^{-1}(t)}_{\text{συνεχής}}\,dt - x f(x)$$

→παραγωγίσιμη

Έχουμε $G'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))\cdot f'(x) - f(x) - x f'(x)$

$$= x\cdot f'(x) - x f'(x) = 0.$$

Άρα, η G είναι σταθερή και

$$G(0) = \int_0^0 f + \int_0^0 f^{-1} - 0f(0) = 0.$$

Άρα, $G(x)=0$ για κάθε $x\geq 0$

5.9) Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $x\in[0,a]$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \Big(\underbrace{\int_0^u f(t)\,dt}_{K(u)}\Big)\,du$$

$$\underbrace{x\int_0^x f(u)\,du}_{\text{παρ}} - \underbrace{\int_0^x u f(u)\,du}_{\text{παρ}}$$

$K(u)$ συνεχής και μάλιστα παραγωγίσιμη. Άρα η $\int_0^x K(u)\,du$ είναι παρ.

Παραγωγίζουμε το αριστερό μέλος.

$$1\cdot\int_0^x f(u)\,du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\,du$$

Το δεξί μέλος $\left(\int_0^x K(u)\,du\right)' = K(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(u)\,du.$

Άρα, η διαφορά τους είναι σταθερή. Για $x=0$ είναι και τα δυο ίσα με μηδέν. Άρα είναι ίσα για κάθε $x\in[0,1]$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

33.) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι
$$a_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx \to 0$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη. Υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Τότε
$$|a_n|=\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |x^n f(x)|\,dx$$
$$=\int_0^1 x^n \underbrace{|f(x)|}_{\le M}\,dx \le \int_0^1 M\cdot x^n\,dx = M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Άρα, $a_n\to 0$.

34.) $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα
Δείξτε ότι η $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{1}{x}\underbrace{\int_0^x g(t)\,dt}_{\text{παρ.}}$
είναι αύξουσα.

Η G είναι παραγωγίσιμη και
$$G'(x)=\frac{x\left(\int_0^x g(t)dt\right)'-\int_0^x g(t)dt}{x^2}=\frac{xg(x)-\int_0^x g(t)dt}{x^2}$$

Για την $G'\ge 0$ αρκεί: $\int_0^x g(t)\,dt\le xg(x)$ $\forall\, x>0$.
Έχουμε $g\uparrow \Rightarrow \forall\, t\in[0,x]$ $g(t)\le g(x)$

$$\Rightarrow \int_0^x g(t)\,dt \le g(x)(x-0)=x\cdot g(x).$$

Άρα $G'\ge 0 \Rightarrow G\uparrow$

(35) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και $0<f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Δείξτε ότι $\int_0^1 [f(x)]^3\,dx \le \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$ (*).

Ορίζουμε με $G(t)=\int_0^t [f(t)]^3\,dx-\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2$

$G:[0,1]\to\mathbb{R}$
Αν δείξουμε ότι $G(t)\le 0$ $\forall\, t\in[0,1]$ τότε $G(1)\le 0$ και έχουμε την (*)

Η G είναι παραγωγίσιμη γιατί f συνεχής
Έχουμε $G'(t)=f(t)^3-2\int_0^t f(t)\,dx\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)'$

$$=f(t)^3-2\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\cdot f(t).$$

$$=f(t)\left[f(t)^2-2\int_0^t f(x)\,dx\right]$$

(*) Έχουμε $f(0)=0$ και η $f\nearrow$ γιατί $f'>0 \Rightarrow f(t)\ge 0$ $\forall\, t\in[0,1]$
Άρα, για την $G'(t)\le 0$ αρκεί νδο
$H(t)=f(t)^2-2\int_0^t f(x)\,dx\le 0$ $\forall\, t\in[0,1]$

Έχουμε $H'(t)=2f(t)\cdot f'(t)-2f(t)=2\underbrace{f(t)}_{\ge 0}\underbrace{[f'(t)-1]}_{\le 0 \text{ από υπόθεση}}\le 0$

Έχουμε: Η $f\searrow$ και $H(0)=0$
$f(0)^2-\cancel{2\int_0^0 f}=0$
Άρα $H(t)\le 0$.

51.) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=f(b)=0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 1$.

Δείξτε ότι
(i) $\int_a^b x\, f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

(ii) $\left(\int_a^b x^2 [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}$

1.) $\int_a^b x f(x) \quad dx = \int_a^b x \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' dx$

$$= \frac{x f^2(x)}{2}\Big|_a^b - \int_a^b (x')\,\frac{f^2(x)}{2}\,dx.$$

$$= \frac{b f^2(b) - a f^2(a)}{2} = -\frac{1}{2}\underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{1} = -\frac{1}{2}$$

(ii.) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \underset{(i)}{=} \left(\int_a^b \underline{x\, f(x)}\ \underline{f'(x)}\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b x^2 f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right)$$

38.) Βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\,dt$

Ισχύει
$$\left|\int_0^{x^2} e^t \sin t\,dt\right| \leq \int_0^{x^2} e^t |\sin t|\,dt \underset{0<x\leq 1}{\leq} \int_0^{x^2} e^t\,dt \leq e\cdot x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Δηλαδή έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$

Εφαρμόζουμε de L'Hospital και θέτοντας $y=x^2$ αρκεί να βρούμε το

$$\lim_{y\to 0} \frac{\left(\int_0^y e^t \sin t\,dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \xrightarrow{y\to 0} \frac{e^0}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$\to 1$

39.) Βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt$

$$\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{\ln(1+t^2)}{2}\Big|_x^{x+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\ln\left(1+(x+\sqrt{x})^2\right)-\ln(1+x^2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{\frac{1+(x+\sqrt{x})^2}{1+x^2}}_{1}\right)\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln 1=0.$$

Αλλιώς, φράσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt\le\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{x+\sqrt{x}}{1+x^2}\,dt$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}}{1+x^2}\left(x+\sqrt{x}-x\right)$$

$$=\frac{x^{3/2}+x}{x^2+1}\xrightarrow{x\to+\infty}0.$$

40.) Παραγωγίστε την $G(x)=\int_0^x e^t\cos(x-t)\,dt.$

$$G(x)=\int_0^x e^t\cos(x-t)\,dt.$$

ΛΑΘΟΣ
$e^x\cos(x-x)=e^x$

$$=\int_0^x e^t(\cos x\cos t+\sin x\sin t)\,dt$$

$$=\cos x\int_0^x e^t\cos t\,dt+\sin x\int_0^x e^t\sin t\,dt.$$

$$G'(x)=-\sin x\int_0^x e^t\cos t\,dt+e^x\cos^2x+\cos x\int_0^x e^t\sin t\,dt+e^x\sin^2x.$$

$$=e^x-\sin x\int_0^x e^t\cos t\,dt+\cos x\int_0^x e^t\sin t\,dt$$

30/5/2012 26ο μάθημα

Επαναληπτικές Ασκήσεις

53.) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο.
Δείξτε ότι: για κάθε $k\in\mathbb{N}$: $f(k)=\int_k^{k+1} f(x)dx - \int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)dx$.

$$\int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)dx = (k+1-x)f(x)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1}(k+1-x)'f(x)dx$$

$$=0-(k+1-x)f(k)+\int_k^{k+1}f(x)dx = -f(k)+\int_k^{k+1}f(x)dx.$$

54.) (a.) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, $\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(b) Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη
Δείξτε ότι $n\int_0^1 x^{n-1}g(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} g(1)$

a.) f φραγμένη: $\exists\ M>0\ \forall x\ |f(x)|\le M$

$$\left|\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx\right| \le \int_0^1 x^{n-1}|f(x)|dx \le M\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{M}{n} \to 0$$

$\left(\frac{x^n}{n}\right)'$

b.) $\int_0^1 nx^{n-1}g(x)dx = \int_0^1 (x^n)'g(x)dx \overset{g'\text{συν}\Rightarrow\text{ολ.}}{=\!=}$

$$x^n g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^n g'(x)dx = g(1)-0-\int_0^1 x^n g'(x)dx$$

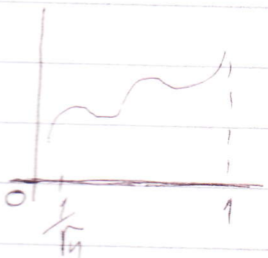
Επίσης, $\int_0^1 x^n g'(x)dx = \int_0^1 x^{n-1}\underbrace{(x\cdot g'(x))}_{f(x)\text{ - συνεχής}}dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα, $\int_0^1 n\cdot x^{n-1}g(x)dx \to g(1)-0=g(1)$.

55) $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη

(α) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{n}} n \cdot f(x) \cdot e^{-nx}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$

(β) $\displaystyle\int_0^{1} n\, f(x)\, e^{-nx}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$



$$α)\ \int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)\,(-e^{-nx})'\,dx = -f(x)e^{-nx}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f'(x)e^{-nx}\,d$$

$$= \underbrace{-f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{-\sqrt{n}}}_{\downarrow\, 0} + f(0) + \int_0^{1/\sqrt{n}} f'(x)\cdot e^{-nx}\,dx$$

- f συνεχής $\Rightarrow |f| \le M$.
- f' συνεχής $\Rightarrow |f'| \le B$.

τότε $\left|-f\,\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot e^{-\sqrt{n}}\right| = \left|f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|\cdot\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \le \frac{M}{e^{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$

$$\left|\int_0^{1/\sqrt{n}} f'(x)e^{-nx}\,dx\right| \le \int_0^{1/\sqrt{n}} \underbrace{|f'(x)|}_{\le B}\cdot \underbrace{e^{-nx}}_{\le 1 \text{ αφού } e^{-nx}<0}$$

$$\le B\overbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}-0\right)}^{\text{μήκος του διαστήματος}} = B\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$β)\ \int_0^{1} n f(x)\cdot e^{-nx}\,dx = \underbrace{\int_0^{1/\sqrt{n}} n\cdot f(x)\cdot e^{-nx}\,dx}_{\downarrow(α)\ f(0)} - \int_{1/\sqrt{n}}^{1} n\cdot f(x)\cdot e^{-nx}\,dx$$

– Αρκεί να δείξουμε ότι: $\displaystyle\int_{1/\sqrt{n}}^{1} n\cdot f(x)\cdot e^{-nx}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Για κάθε $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$ έχουμε $x \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow nx \ge \sqrt{n} \Rightarrow e^{-nx} \le e^{-\sqrt{n}}$

Συνεπώς, $\displaystyle\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{1} n\, f(x)\, e^{-nx}\,dx\right| \le \int_{1/\sqrt{n}}^{1} \underbrace{|f(x)|}_{\le M}\cdot n\, \underbrace{e^{-nx}}_{\le e^{-\sqrt{n}}}\,dx \le M\cdot n\cdot e^{-\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$\le M\,\frac{n}{e^{\sqrt{n}}} \to 0$$

36.) $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0)=0$

Δείξτε ότι: $\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \le \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2 dt$

Ειδική περίπτωση: Υποθέτουμε ότι $f'\ge 0$ στο $[0,a]$

Τότε, και

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt \ge 0 \quad \forall\ x\in[0,a]$$

$f(y)-f(0)=\int_0^y f'(t)dt$

C-S.

$f\cdot f'=\left(\frac{f^2}{2}\right)'$

Τότε,

$$|f(t)f'(t)|=f(t)f'(t)$$

και $\int_0^a |f(t)f'(t)|dt=\int_0^a f(t)f'(t)\,dt=\int_0^a \left(\frac{f^2(t)}{2}\right)' dt$

$$=\frac{f^2(a)}{2}-\cancel{\frac{f^2(0)}{2}}\to 0=\frac{\left(\int_0^a 1\cdot f'(t)dt\right)^2}{2}\le\frac{\left(\int_0^a 1^2\right)\left(\int_0^a f'(t)^2dt\right)}{2}$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^a f'(t)dt$$

Γενική περίπτωση

Ορίζουμε $g(t)=\int_0^t |f'(s)|ds \ge \left|\int_0^t f'(s)ds\right|=|f(t)-\cancel{f(0)}|$

(*) $g'(t)=|f'(t)|\ge 0 \quad / \quad g(0)=0$

Άρα, $\int_0^a |f(t)|\cdot|f'(t)|dt \le \int_0^a g(t)g'(t)\,dt \underset{\text{Ειδική περίπτωση για την } g}{\le} \frac{a}{2}\int_0^a |g'(t)|^2dt$

$$\| \quad \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2 dt$$

διότι $|f'(t)|=|g'(t)|$ από την (*)

52) $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες Δείξτε ότι:

(a) $(*)$ $\frac{1}{2}\int_a^b \Big[\underbrace{\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy}_{h(x)} \Big] dx = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \Big(\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I}\Big)\Big(\underbrace{\int_a^b g(x)dx}_{J}\Big)$

b) Αν $f,g \nearrow$ δείξτε ότι $I\cdot J \leq (b-a)\int_a^b \underbrace{f(x)g(x)}_{L} dx$

(a) $h(x) = \int_a^b f(y)g(y)\,dy - \int_a^b f(x)g(y)\,dy - \int_a^b f(y)g(x)\,dy + \int_a^b f(x)g(x)\,dy$

$= \int_a^b \underbrace{f(y)g(y)}_{L}\,dy - f(x)\int_a^b g(y)\,dy - g(x)\int_a^b f(y)\,dy + f(x)g(x)(b-a)$

$= L - J\cdot f(x) - I\cdot g(x) + f(x)g(x)(b-a)$

Άρα,

Αριστερό μέρος της $(*) = \frac{1}{2}\int_a^b h(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\Big[\int_a^b L\,dx - J\int_a^b f(x)dx - I\int_a^b g(x)dx + (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\Big]$

$= \frac{1}{2}\big[L(b-a) - J\cdot I - I\cdot J + (b-a)L\big]$

$= L(b-a) - IJ = b-a\int_a^b fg - \int_a^b f\cdot\int_a^b g$

(b) Από τα (a) αρκεί να δείξουμε ότι:

$\frac{1}{2}\int_a^b \Big[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\Big] dx \geq 0.$

$\shortparallel$

$L(b-a) - IJ$

Παρατηρούμε ότι: $\forall\, x,y \in [a,b]$ $\quad (f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geq 0$

αν $x<y$ + και τα δυο

αν $x>y$ − και τα δυο γιατί $f,g \uparrow$

$$\Rightarrow K(x) = \int (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy \geq 0$$

γιατί $f,g\uparrow$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{K(x)}_{\geq 0}\,dx \geq 0$$

41) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$

<u>Δείξτε</u> ότι η f είναι σταθερή.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

50) $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής

Υποθέτουμε ότι το $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει.

<u>Δείξτε</u> ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Επειδή $f>0 \Rightarrow \int_0^M f(x)\,dx$ αύξουσα συνάρτηση του M

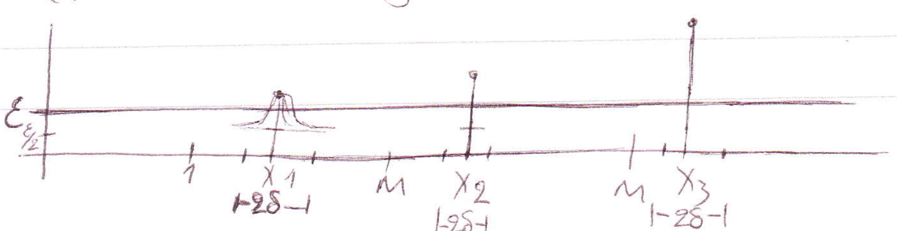
Αφού το $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ υπάρχει, έχουμε $A>0$:

$$\forall\, M>0 \quad \int_0^M f(x)\,dx \leq A.$$

<u>Απαγωγή σε άτοπο</u>

Έστω ότι δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $M>0$ υπάρχει $x>M$ ώστε $f(x)\geq\varepsilon$



$\exists \delta$: αν $x, y \geq 0$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αν $|f(y) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(y) \geq f(x_1) - \frac{\varepsilon}{2}$

$> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_0^{x_n} f(x)\,dx \geq \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \int_{x_3-\delta}^{x_3+\delta} \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\delta + \frac{\varepsilon}{2} 2\delta + \ldots + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\delta \quad = n \cdot \delta \varepsilon$$

Άρα $n\delta\varepsilon \leq A \quad \forall n$ (από Αρχιμήδεια ιδιότητα)