18/5/2012 21ο μάθημα

Αποδ. Θ.6

Έστω $\varepsilon>0$ Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε
$U(\phi\circ f,P) - L(\phi\circ f,P) < \varepsilon$ (*)

(από το κριτήριο του Riemann έχουμε το συμπέρασμα)

1.) Η ϕ είναι συνεχής στο $[m,M] \rightsquigarrow \phi$ φραγμένη:
$\exists\ A>0\ \forall\ y\in[m,M] : |\phi(y)|\leq A$

2.) Για $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2A+b-a} > 0$ βρίσκουμε $\delta>0$: αν $y,z \in [m,M]$ κ' $|y-z|<\delta$

τότε $|\phi(y)-\phi(z)|<\varepsilon_1$
(τέτοιο δ υπάρχει γιατί η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής

3.) Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\delta^2$

Θα δείξουμε ότι για την P ισχύει η (*)

4.) Έχουμε, αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$
$$U(f,P)-L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)<\delta^2$$

Ορίζουμε
$I = \{0\leq k\leq n-1 : M_k(f)-m_k(f)<\delta\}$
$J = \{0\leq k\leq n-1 : M_k(f)-m_k(f)\geq\delta\}$

Τότε $U(f,P)-L(f,P) = \overbrace{\sum_{k\in I}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)}^{\geq 0}+\sum_{k\in J}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)$ $<\delta^2$

$\Rightarrow \delta\cdot\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k) \leq \sum_{k\in J}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)<\delta^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k) < \delta \quad (**)$$

5.) Έχουμε $U(\phi\circ f, P) - L(\phi\circ f, P) =$

$$= \sum_{k\in I}\left(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k\in J}\left(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f)\right)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε το εξής:

αν $k\in J$ και $x\in[x_k, x_{k+1}]$ τότε

$$-A \leq (\phi\circ f)(x) = \phi(\underbrace{f(x)}_{\in[m,M]}) \leq A$$

$$\Rightarrow -A \leq m_k(\phi\circ f) \leq M_k(\phi\circ f) \leq A$$

$$\Rightarrow M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f) \leq 2A$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in J}\left(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k) \leq 2A\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k) \underset{**}{<} 2A\delta$$

Για το πρώτο άθροισμα έχουμε:

αν $k\in I$ και $x, x'\in[x_k, x_{k+1}]$ τότε

$$f(x) - f(x') \leq M_k(f) - m_k(f) < \delta \Rightarrow$$

$$\phi(\underbrace{f(x)}_{y}) - \phi(\underbrace{f(x')}_{z}) < \varepsilon_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f) \leq \varepsilon_1$$

<u>Τότε</u> $\sum_{k\in I}\left(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k) \leq \varepsilon_1\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k) \leq \varepsilon_1(b-a)$

Τελικά στην (5) έχουμε $U(\phi\circ f, P) - L(\phi\circ f, P) < \varepsilon_1(b-a) + \delta\cdot 2A$
$< \varepsilon_1(b-a+2A) = \varepsilon$

! <u>Σημείωση:</u> Στην επιλογή του δ, απαιτώ $\delta < \varepsilon_1$.

Συνέπειες:

I.) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Αποδ:

$|f| = \phi \circ f$ όπου $\phi(t) = |t|$ συνεχής.

II.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε η f^2 είναι ολοκληρώσιμη

Αποδ:

$f^2 = \phi \circ f$ όπου $\phi(t) = t^2$ συνεχής

III.) Αν οι f, g ολοκληρώσιμες τότε η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη

Αποδ:

$$f, g \text{ ολοκλ.} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f+g \text{ ολοκλ.} \\ f-g \text{ ολοκλ.} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} (f+g)^2 \\ (f-g)^2 \end{array}\right\} \text{ ολοκλ.}$$

$$\Rightarrow 4f\cdot g = (f+g)^2 - (f-g^2) \text{ ολοκλ.}$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}(4fg) \text{ ολοκλ.}$$

IV.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

αποδ.

Από το I.) η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη άρα το δεξί μέλος ορίζεται καλά.

Επίσης $\forall\, x \in [a,b]$ $\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$|\gamma| \leq \delta$

$-\delta \leq \gamma \leq \delta$

$$\Downarrow$$

$$-\int |f(x)|\,dx \leq \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\gamma} \leq \underbrace{\int |f(x)|\,dx}_{\delta}.$$

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\,dx.$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

6.) Αν η f είναι φραγμένη και $\forall P$ $U(f,P)=L(f,P)$ τότε η f είναι σταθερή.

Θεωρώ τη διαμέριση $P=\{a=x_0<b=x_1\}$ **Σωστό**

μόνο αυτά παίρνω

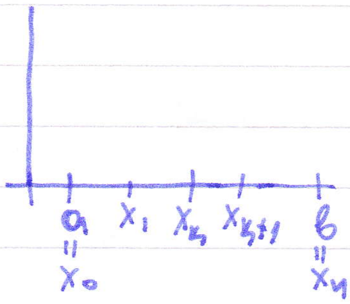
Τότε $$\underbrace{0}_{\text{από υπόθεση}} = U(f,P)-L(f,P) = (\underbrace{M_0}_{\sup(f)} - \underbrace{m_0}_{\inf(f)})\underbrace{(b-a)}_{=x_1-x_0}$$

στο $[a,b]$

Άρα $M_0=m_0 \Rightarrow \sup(f)=\inf(f) \Rightarrow f$ σταθερή.

7.) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $U(f,P)=L(f,P)$ τότε η f είναι σταθερή.

Σωστό



Ξέρουμε ότι υπάρχει $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ ώστε $U(f,P)-L(f,P)=$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)}_{M_k-m_k\geq 0 \text{ κ' } x_{k+1}-x_k>0} = 0$$

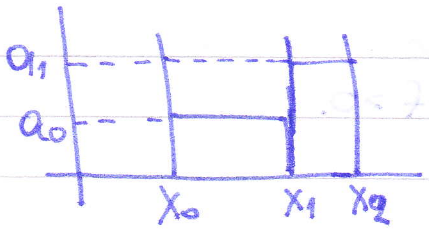
Άρα $(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)=0$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

$\Rightarrow M_k=m_k \ \forall k$

$\Rightarrow \sup(f)=\inf(f)$ στο $[x_k,x_{k+1}]$ για κάθε k.

Άρα η f είναι σταθερή σε κάθε $[x_k,x_{k+1}]$:

$\exists\, a_k : \forall\, x\in[x_k,x_{k+1}]$ $f(x)=a_k$.



Ισχυρισμός: $a_0 = a_1$

Διότι $x_1 \in [x_0, x_1] \Rightarrow f(x_1) = a_0$
$x_1 \in [x_1, x_2] \Rightarrow f(x_1) = a_1$

Με τον ίδιο τρόπο αφού $x_2 \in [x_1, x_2]$, $x_2 \in [x_2, x_3]$ παίρνουμε
$a_1 = f(x_2) = a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
Επαγωγικά $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$
Τότε $\forall x \in [a,b]$ έχω $f(x) = A$.

8.) Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Σωστό
Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$
Στο $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός και από την υπόθεση $f(q_n) = 0$.
$m_k \leq f(q_n) \leq M_k$

Τότε $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{M_k}_{\geq 0} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{>0} \geq 0$

και $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{m_k}_{\leq 0} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{>0} \leq 0$.

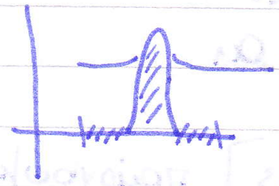
Τότε $\overline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \inf_{P \text{(όλων των διαμ.)}} U(f,P) \geq 0$

και $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \sup_P L(f,P) \leq 0$

$\int_a^b f = 0$

14.) (την είχαμε δει στο προηγούμενο μάθημα)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f\geq 0$, $f(x_0)=0 \Rightarrow \int_a^b f>0$.



16.) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $\forall$ συνεχή $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$.
Δείξτε ότι $f\equiv 0$.

Επιλέγουμε $g=f$.
Από την υπόθεση $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$.
Επίσης η f^2 είναι συνεχής και $f^2\geq 0$ παντού

Άρα $f^2\equiv 0$ (αν υπήρχε $x_0: f^2(x_0)>0$ από την 14) θα είχαμε $\int f^2>0$).

Συνεπώς $\forall\, x\in[a,b]$ $[f(x)]^2=0 \Rightarrow \forall\, x\in[a,b]$ $f(x)=0$.

17.) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\forall\, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $g(a)=g(b)=0$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$.

<u>α' τρόπος</u> (γρήγορος)

Θεωρούμε την $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)(x-a)(b-x)$
Η g είναι συνεχής και $g(a)=g(b)=0$.
Από την υπόθεση $\int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\underbrace{(x-a)}_{\geq 0}\underbrace{(b-x)}_{\geq 0}\,dx=0$

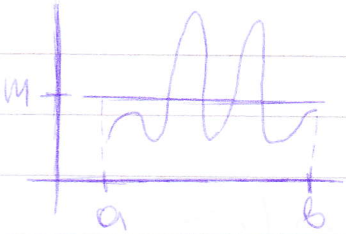
Όπως στην 16.) $\Rightarrow f^2(x)(x-a)(b-x)=0$ $\forall\, x\in[a,b]$
$\Rightarrow \forall\, x\in(a,b)$, $f^2(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$.
Τότε $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\underbrace{f(x)}_{0}=0$ και $\lim\limits_{x\to b^-}\underbrace{f(x)}_{0}=f(b)=0$.

β' τρόπος (από υποδείξεις).

21/5/2012 22ο μάθημα

Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Η μέση τιμή της f είναι ο αριθμός: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$



Στο σχήμα, ο m έχει την ιδιότητα

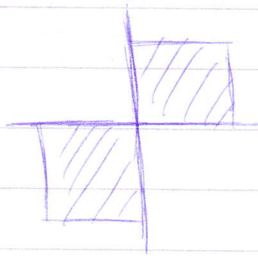
$$m\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Ερώτηση: Είναι σωστό ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=m$;

ΟΧΙ

$m=0$ αλλά η f δεν μηδενίζεται



Αν η f υποτεθεί συνεχής τότε η απάντηση στην ερώτηση είναι ΝΑΙ

Θεώρημα 1: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Θεώρημα 2: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ μη-αρνητική ολοκληρώσιμη.
Τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Παρατήρηση: Το θεώρημα 1 είναι πόρισμα του θεωρήματος 2.
Εφαρμόζουμε το Θ.2 με $g(x)=1$:
$\exists\ \xi : \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b 1\,dx = f(\xi)(b-a)$

Αποδ. του Θ.2
Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα υπάρχουν τα $m=\min(f)$, $M=\max(f)$ (παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή)

Τότε: για κάθε $x\in[a,b]$, $m\le f(x)\le M$
$\xrightarrow[g(x)\ge 0]{} m\cdot g(x)\le f(x)g(x)\le M\cdot g(x)$.

Οι τρεις συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^b m g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b M g(x)\,dx \quad (*)$

$\Rightarrow m \le \boxed{\dfrac{\int f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}} \le M$ (αν υποθέσαμε ότι $\int_a^b g(x)dx>0$ αρνητικό δεν μπορεί να είναι γιατί $g>0$ ή την περίπτωση $g=0$ θα την δούμε χωριστά)

I

Έχουμε $m=\min(f)\le I\le \max(f)=M$ και η f είναι συνεχής
Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi\in[a,b]$:
$f(\xi)=I \Rightarrow f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Αν $\int_a^b g(x)\,dx=0$ τότε η $(*)$ μας δίνει $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$

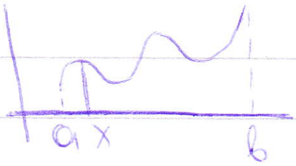
Τότε, για οποιοδήποτε $\xi\in[a,b]$ έχουμε

$$0=\boxed{\int f\cdot g = f(\xi)\cdot\int g}=0$$

Συμφωνία: (a) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a αν η "δεξιά παράγωγος"

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

. Τότε, θα γράφουμε $f'(a)$ αντί για $f'_+(a)$.



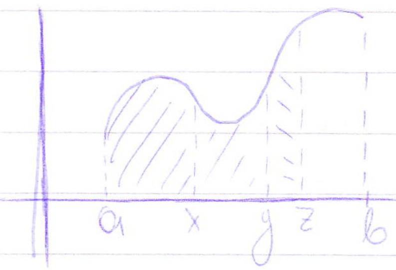
Όμοια, λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο b αν υπάρχει η $f'(b)=f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$

Τέλος, θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. αν υπάρχουν οι $f'(a)$, $f'(b)$ όπως ορίστηκε εδώ και η $f(x)$ $\forall\, x\in(a,b)$ με την κλασική έννοια.

b) Αν $a<b$ και η $f:[a,b]$ ολοκλ. $\Big\}$ $\Rightarrow$ ορίζουμε $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

και

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

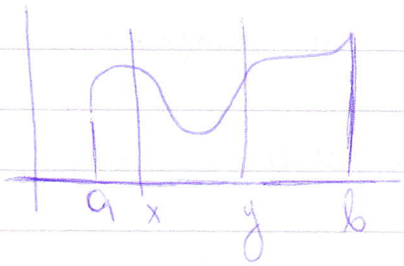


$$\int_a^\gamma f=\int_a^b f+\int_b^\gamma f.$$

Ορισμός (αόριστο ολοκλήρωμα)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Για κάθε $x\in[a,b]$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$.
Ορίζουμε $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F[x]=\int_a^x f(t)\,dt$
Η F λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f

Θεώρημα 3: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε, η $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$ είναι Lipschitz συνεχής

Αποδ.
Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα φραγμένη. Υπάρχει $M>0$ ώστε $\forall\, t\in[a,b]$ $|f(t)|\leq M$.
Έστω $x,y\in[a,b]$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x<$



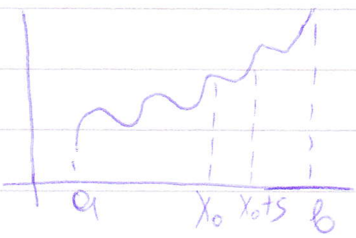
$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right|$$
$$= \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt =$$
$$= M(y-x) = M|y-x|$$

Άρα, η F είναι Lipschitz με σταθερά M.

Θεώρημα 4: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν $x_0\in[a,b]$ και η f είναι συνεχής στο x_0 τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$.

Αποδ.

Υποθέτουμε ότι $x_0\in(a,b)$ [Στις περιπτώσεις $x_0=a$ και $x_0=b$ δείχνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι $F'_+(a)=f(a)$, $F'_-(b)=f(b)$].



• Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{\lim \frac{F(x_0+s)-F(x_0)}{s} = f(x_0)}$$

(τότε, $\exists$ $F'(x_0)=f(x_0)$)

• Υπάρχει $\delta_1>0$ (πχ $\delta_1=\min\{b-x_0, x_0-a\}$) ώστε αν $|s|<\delta_1$ τότε $x_0+s\in[a,b]$

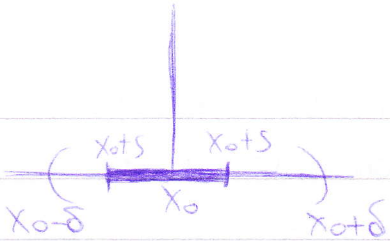
Έστω $\varepsilon>0$

Γράφουμε $\left|\frac{F(x_0+s)-F(x_0)}{s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{s}\left[\int_a^{x_0+s} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] - f(x_0)\right|$

$$= \left|\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s} f(t)\,dt - f(x_0)\right| \overset{!}{=} \left|\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s} f(t)\,dt - \underbrace{\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s} f(x_0)\,dt}_{f(x_0)}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right|$$

(*) Η f είναι συνεχής στο x_0: υπάρχει $\delta>0$: για κάθε $|s|<\delta$ και $t\in[x_0, x_0+s]$ ή $[x_0+s, x_0]$ αν $s<0$ ισχύει $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$



Βρίσκω $\delta>0$ ώστε $|y-x_0|<\delta$
$\Longrightarrow |f(y)-f(x_0)|<\varepsilon$.

1η περίπτωση $0<s<\delta$:

$$\left|\frac{F(x_0+s)-F(x_0)}{s}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+1}\big(f(t)-f(x_0)\big)dt\right| \le \frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+1}\underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\varepsilon}dt$$

$$\le \frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s}\varepsilon\, dt = \frac{1}{s}\varepsilon(x_0+s-x_0)=\varepsilon.$$

2η περίπτωση $-\delta<s<0$:

$$\left|\frac{F(x_0+s)-F(x_0)}{s}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_0+s} f(t)-f(x_0)\,dt\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_{x_0+s}^{x_0}\big(f(t)-f(x_0)\big)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{|s|}\int_{x_0+s}^{x_0}\underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{\varepsilon}dt \le \frac{1}{|s|}\varepsilon(x_0-x_0-s)=\frac{1}{|s|}\varepsilon|s|=\varepsilon$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, η $F[x]=\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Εφαρμογή: άλλη αποδ του Θεωρ. 1
Έχουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχή και ζητάμε $\xi\in[a,b]$ ώστε
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Θεωρούμε την $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$ παραγωγίσιμη στο (a,b) και $F(b)=\int_a^b f(t)dt$, $F(a)=\int_a^a f(t)=0$.

Από το Θεώρημα μέσης τιμής για την F υπάρχει $\xi\in(a,b)$:
$$F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Από το Θ.5 $F'(\xi)=f(\xi)$. Άρα $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\big(F(b)-F(a)\big)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται παράγουσα (ή αντιπαράγωγος) της f αν η G είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $G'=f$.

Αργότερα, $G=\int f$
πχ. $\frac{x^2}{2}=\int f$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.
Έστω G παράγουσα της f (δηλ. $G'\equiv f$)
Ξέρουμε επίσης (Θεωρ. 5) ότι η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με
$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F'\equiv f$

Τότε, για την $G-F:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχουμε: η $G-F$ είναι παραγωγίσιμη και
$(G-F)'=G'-F'=f-f=0$ παντού στο $[a,b]$.

Άρα η $G-F$ είναι σταθερή στο $[a,b]$.
Υπάρχει $c\in\mathbb{R}$: $G(x)=F(x)+c=\int_a^x f(x)\,dt+c$ ⊛ για κάθε $x\in[a,b]$

Βάζοντας $x=a$ στην ⊛ παίρνουμε
$G(a)=\int_a^a f(t)\,dt+c$.

Γυρίζοντας πίσω στην ⊛ έχουμε $\forall\, x\in[a,b]$
$$G(x)-G(a)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Ειδικότερα, για $x=b$ παίρνουμε $G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)\,dt$.

Έχουμε λοιπόν ~~δείξει το~~ εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
Αν $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε: $\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$.

και γενικότερα,
$\forall\, x\in[a,b]$ $\int_a^x f(t)\,dt=G(x)-G(a)$.

Παραδείγματα: $\int_0^2 x^2 dx = G(2) - G(0) = \frac{8}{3}$

$G(x) = \frac{x^3}{3}$ / $G'(x) = x^2$, x^2 συνεχής

23/5/2012 — <u>23ο μάθημα</u>

Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απ. Λογισμού

1. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

2. Το <u>αόριστο ολοκλήρωμα</u> της f είναι η $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ με
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

3. Η F είναι Lipschitz συνεχής αν $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in [a,b]$.

4. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in [a,b]$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$.

<u>Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα</u>: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, η $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F' \equiv f$

5. Μια $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>παράγουσα</u> της συνεχούς f αν $G' = f$. Αν G παράγουσα της f τότε $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$.
$\Rightarrow G - F = c \Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$
(για $x = a$ έχουμε $c = G(a)$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x$ $G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$

Ειδικότερα, $\boxed{G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt}$

Θεώρημα: Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη
Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε
$$G(b)-G(a)=\int_a^b G'(t)\,dt$$

Απόδειξη:
Θα δείξουμε ότι για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ ισχύει

$$\underset{\substack{\downarrow \sup_P \\ \int G'}}{L(G',P)} \le G(b)-G(a) \le \underset{\substack{\downarrow \inf_P \\ \int G'}}{U(G',P)}$$

Δεν ισχύει
G παραγωγίσιμη
$\not\Rightarrow$ G' συνεχής
$\not\Rightarrow$ G' ολοκλ.

Σε κάθε $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots,n-1$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα μέσης τιμής για την G: υπάρχει $\xi_k\in(x_k,x_{k+1})$ ώστε:
$$m_k(G')(x_{k+1}-x_k)\le \underline{G(x_{k+1})-G(x_k)} = G'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) \le M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$
(γιατί $\forall \xi\in[x_k,x_{k+1}]$ $m_k(G')\le G'(\xi)\le M_k(G')$)
m_k: inf στο $[x_k,x_{k+1}]$
M_k: sup στο $[x_k,x_{k+1}]$

προσθέτω κατά μέλη $\Rightarrow$
$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(G')(x_{k+1}-x_k)\le \sum_{k=0}^{n-1}\left(G(x_{k+1})-G(x_k)\right)\le \sum_{k=0}^{n-1} M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$

$$\Rightarrow L(G',P)\le G(x_n)-G(x_0)\le U(G',P)$$

Τότε
$$\left.\begin{aligned}\int_a^b G' &= \sup_P L(G',P)\le G(b)-G(a)\\ \int_a^b G' &= \inf_P U(G',P)\ge G(b)-G(a)\end{aligned}\right\}\ G(b)-G(a)=\int_a^b G'(t)\,dt$$

6. Επίσης είχαμε δει το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκλ. λογισμού

(α) αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, υπάρχει $\xi\in(a,b)$: $f(\xi)=\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{μέση τιμή της } f}$

(β) αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $g\geq 0$. τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ασκήσεις

5.3) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε $\int_0^1 f(x)x^2\,dx = \frac{f(s)}{3}$

Θεωρούμε την $g(x)=x^2$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (άρα ολοκλ.) και $g(x)=x^2\geq 0$ στο $[0,1]$

Από το θεωρ. μέσης τιμής υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)\underbrace{x^2}_{g(x)}\,dx = f(s)\int_0^1 x^2\,dx = \frac{f(s)}{3}$$

Παρατηρούμε ότι αν $G(x)=\frac{x^3}{3}$ τότε η $G'(x)=x^2$.

$\Rightarrow \underbrace{G(1)-G(0)}_{1/3}=\int_0^1 x^2\,dx$

4.18) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{A^2}\cdot\underbrace{\int_a^b g^2(x)\,dx}_{B^2}$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1=\frac{f}{A}$, $g_1=\frac{g}{B}$

(Αν $A=0$ τότε $f\geq 0 \Rightarrow \int f\cdot g=0$
$B=0$ τότε $g\geq 0 \Rightarrow \int f\cdot g=0$ $\}$ $0\leq 0$ ισχύει)

Έχουμε $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = A\cdot B\int_a^b f_1(x)g_1(x)\,dx$

$\leq AB\int_a^b \frac{f_1^2(x)+g_1^2(x)}{2}\,dx =$

$= AB\left(\frac{1}{2}\int f_1^2 + \frac{1}{2}\int g_1^2\right)$

Όμως $\int f_1^2 = \int \frac{f^2}{A^2} = \frac{1}{A^2}\int f^2 = 1$

και $\int g_1^2 = \int \frac{g^2}{B^2} = \frac{1}{B^2}\int g^2 = 1$

$AB\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) = AB$

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2$$

Συνεπώς

$\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)g(x)|\,dx \leq AB$

$\Rightarrow \left(\int f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \underset{\displaystyle \int f^2\cdot\int g^2}{\overset{\shortparallel}{A^2B^2}}$

<u>Άλλη απόδειξη</u> (με υπόθεση ότι οι f,g είναι ολοκληρώσιμες)

Ορίζουμε $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $P(t) = \int_a^b \underbrace{(t\,f(x)+g(x))^2}_{\geq 0 \text{ παντού}}\,dx$

1.) $P(t)\geq 0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$

2.) $P(t) = \int_a^b \{t^2 f^2(x) + 2t\,f(x)g(x) + g^2(x)\}\,dx$

$= \int_a^b t^2 f^2(x)\,dx + \int_a^b 2t\,f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx$

$= \left(\int f^2\right)t^2 + \left(2\int f\cdot g\right)t + \int g^2$

Δηλ. $P(t) = At^2 + Bt + \Gamma$ όπου $A = \int f^2$, $B = 2\int f\cdot g$, $\Gamma = \int g^2$

Αφού βαθμός$(P) = 2$ και $P \geq 0$ η διακρίνουσα του P είναι ≤ 0

Δηλ. $B^2 - 4A\Gamma \leq 0$.

$$\Rightarrow B^2 \leq 4A\Gamma \Rightarrow \cancel{4}\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \cancel{4}\int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$

5.12) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$.
Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Σημείωση: Λέμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει η f' στο $[a,b]$ και είναι συνεχής συνάρτηση και γράφουμε $f \in C^1[a,b]$

• $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$ (η f' είναι συνεχής (άρα ολοκλ. στο $[a,x]$) και η f παράγουσα της f')

• $|f(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| = \int_0^x |f'(t)|\,dt$

$$= \int_0^x |f'(t)|\cdot 1\, dt \leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{x}\left(\int_0^x \underbrace{|f'(t)|^2}_{\geq 0} dt\right)^{1/2} \underset{0<x\leq 1}{\leq} \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

4.19) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Γράφουμε

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\cdot \overset{g(x)}{1}\, dx\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \int_0^1 f^2(x)\,dx \cdot \cancel{\int_0^1 1^2\,dx}$$

5.10) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη.
Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$
δείξτε ότι: $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \int_a^b |f'(t)|\,dt$.

Γράφουμε $\sum_{k=0} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \right|$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

$$\boxed{\begin{gathered} a < \gamma < b \\ \int_a^b g = \int_a^\gamma g + \int_\gamma^b g \end{gathered}}$$

5.5) Ένα παράδειγμα
Αν $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, υπολογίστε την $F'(x)$.

$F'(x) = 2x\, f(x^2)$

Εξήγηση

Θεωρώ την $A(y) = \int_0^y f(t)\,dt$ / $A'(y) = f(y)$
και την $g(z) = z^2$
Τότε $F(x) = A(x^2) = A(g(x)) = (A \circ g)(x)$
$\Rightarrow F'(x) = A'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot 2x = f(x^2) \cdot 2x.$