Πρόοδος
11-2: Σάββατο 2 Ιουνίου
Κεφ. 1-5 λεπτομέρειες στην e-class

11/5/2012 19ο μάθημα

Παραδείγματα - ασκήσεις - ερωτήσεις κατανόησης

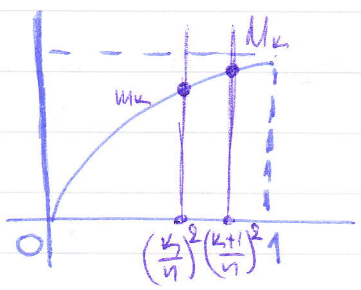
1. Κριτήριο του Riemann

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) f ολοκληρώσιμη
(β) για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει P ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$
(γ) υπάρχει ακολουθία $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ διαμερίσεων ώστε:
$$U(f,P_n)-L(f,P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

2. Κάθε μονότονη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη
3. Κάθε συνεχής $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Παραδείγματα
(με τον ορισμό του ολοκληρώματος)

(i.) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$



Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση
$$P_n=\left\{0=\frac{1}{n^2}<\frac{2^2}{n^2}<\frac{3^2}{n^2}<\dots<\frac{(n-1)^2}{n^2}<1\right\}$$

Τα σημεία δεν ισαπέχουν.

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$$

- $[x_k,x_{k+1}]=\left[\frac{k^2}{n^2},\frac{(k+1)^2}{n^2}\right]$, $k=0,1,\dots,n-1$

Η f είναι αύξουσα, άρα
$$m_k=f(x_k)=\sqrt{x_k}=\frac{k}{n}$$

$$M_k=f(x_{k+1})=\sqrt{x_{k+1}}=\frac{k+1}{n}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}\right)$$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}$$

- $$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\underbrace{\frac{k+1}{n}}_{M_k}-\underbrace{\frac{k}{n}}_{m_k}\Big)\frac{2k+1}{n^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{2k+1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

$$=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$ Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη

- Για την τιμή του ολοκληρώματος:

$$U(f,P_n)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(2k+1)=\frac{1}{n^3}\Big[2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+3\sum_{k=1}^{n-1}k+n\Big]$$

$$=\frac{1}{n^3}\Big[\frac{2(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{3(n-1)n}{2}+n\Big]\longrightarrow\frac{2}{3}$$

Με τον ίδιο τρόπο, $L(f,P_n)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}$

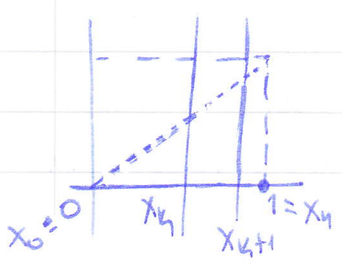
Τότε $\underset{\downarrow\,2/3}{L(f,P_n)}\le\int_0^1\sqrt{x}\,dx\le\underset{\downarrow\,2/3}{U(f,P_n)}$

Άρα, $\int_0^1\sqrt{x}=\frac{2}{3}$

(ii.) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΙ.

"Θα βρούμε $\varepsilon>0$ ώστε <u>για κάθε</u> διαμέριση P του $[0,1]$ να ισχύει $U(f,P)-L(f,P)\ge\varepsilon$"

<u>Τρόπος:</u> Παίρνω τυχούσα P και προσπαθώ να φράξω από κάτω το $U(f,P)-L(f,P)$.



Έστω $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = 1\}$ διαμέριση του $[0,1]$.

· Στο $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε | $m_k = 0$, $M_k = x_{k+1}$

Έχουμε $f \geq 0$ και υπάρχει άρρητος a στο $[x_k, x_{k+1}]$ όπου $f(a) = 0$.

Άρα $\min\{f(x),\ x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = f(x) = 0$.

<u>Εξήγηση</u> Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} 0 \leq x_{k+1} \\ x \leq x_{k+1} \end{cases} \Rightarrow M_k$$

Υπάρχει ακολουθία ρητών q_n στο $[x_k, x_{k+1}]$, $q_n \to x_{k+1}$

$\Rightarrow f(q_n) = q_n \to x_{k+1}$.

· Τότε $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \overset{0}{\cancel{m_k}} (x_{k+1} - x_k) = 0$.

και

$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$

$M_k \geq f(q_n)\ \forall n$ (γιατί $M_k = \sup(f)$ στο $[x_k, x_{k+1}]$) $\underset{\to x_{k+1}}{}$

Άρα $M_k \geq x_{k+1}$

Συνεπώς, $U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$.

$$> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^2 - x_0^2 \\ + x_2^2 - x_1^2 \\ \vdots \\ + x_n^2 - x_{n-1}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

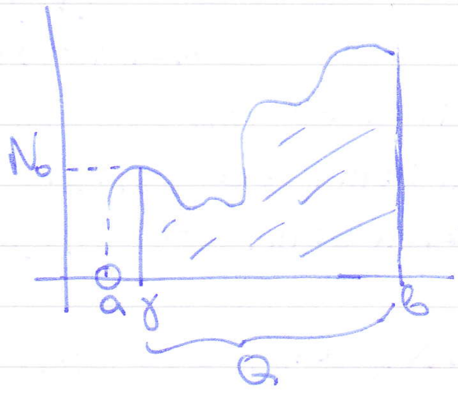
Είδαμε ότι: $\forall P$

$U(f,P) - L(f,P) \geq \frac{1}{2}$

Από το κριτήριο Riemann η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Βασική άσκηση : 9

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a<\gamma<b$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,b]$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.



Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και θα ορίσουμε διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.
(κρ. Riemann $\rightsquigarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$).

Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $-M\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.

· Θεωρούμε $\gamma\in(a,b)$ ώστε $\gamma-a<$;;

· Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,b]$, άρα υπάρχει διαμέριση $Q=\{\gamma=x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ ώστε $U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon/2$

Ορίζουμε $P=\{a\}\cup Q$ $\{a=x_0<\gamma=x_1<\dots<x_n=b\}$
Αυτή είναι διαμέριση του $[a,b]$.

Τότε $U(f,P)=M_0(\gamma-a)+U(f,Q)$ όπου $M_0=\sup\{f(x): a\leq x\leq\gamma\}$.

και $L(f,P)=m_0(\gamma-a)+L(f,Q)$ όπου $m_0=\inf\{f(x): a\leq x\leq\gamma\}$

Άρα $U(f,P)-L(f,P)=(M_0-m_0)(\gamma-a)+[U(f,Q)-L(f,Q)]$
$<(M_0-m_0)(\gamma-a)+\varepsilon/2\leq 2M(\gamma-a)+\varepsilon/2$
$< 2M\cdot\frac{\varepsilon}{;}+\varepsilon/2=\varepsilon$

(10.) Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} &, x \neq 0 \\ 2 &, x=0 \end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

• Η f είναι φραγμένη $\forall x \in [-1,1] : |f(x)| \leq 2$ (≤ 1 στο $[-1,0] \cup [0,1]$ και $f(0)=2$)

• Αν $0<\gamma<1$ η $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[\gamma,1]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,1]$.
Από την Άσκηση 9, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Όμοια, δείχνουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$, άρα (προσθετικώς θεώρημα) και στο $[-1,1]$.

(11.) Έστω $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Αν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $[a,b]$ εκτός από ένα (γενικότερα, εκτός από πεπερασμένα το πλήθος) τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Στο $[x_0,b]$: για κάθε $x_0<\gamma<b$ η f είναι συνεχής στο $[\gamma,b] \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,b]$.
Είναι και φραγμένη $\Rightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_0,b]$
Όμοια, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x_0]$
$\Rightarrow$ ολοκλ. και στο $[a,b]$.

Ερωτήσεις Κατανόησης ($f:[a,b]\to\mathbb{R}$ / Σωστό ή Λάθος;)

1.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε είναι φραγμένη

ΣΩΣΤΟ

Ορίσαμε ολοκλήρωμα μόνο για φραγμένες συναρτήσεις.

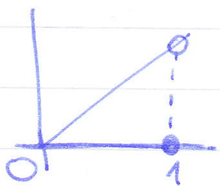
3.) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι ολοκληρώσιμη

ΛΑΘΟΣ

η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι φραγμένη αλλά όχι ολοκληρώσιμη.

2.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

ΛΑΘΟΣ



Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$

δεν παίρνει μέγιστη τιμή ($\sup(f)=1$ δεν είναι τιμή της f).

Είναι όμως ολοκληρώσιμη γιατί είναι φραγμένη και έχει ένα μόνο σημείο ασυνέχειας.

4.) Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη

ΛΑΘΟΣ

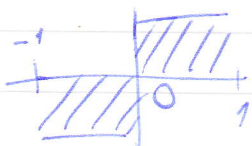
Στο παράδειγμα για την Ερώτηση 3, η $|f|$ είναι η σταθερά $|f(x)|=1$ άρα είναι ολοκληρώσιμη.

5.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c\in(a,b)$ ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

ΛΑΘΟΣ (αν η f είναι συνεχής ισχύει -θα το δούμε-)

$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -1, & -1\le x<0\end{cases}$



$$\int_{-1}^{1} f = \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{1} f = -1+1=0.$$

Αν υπήρχε $c\in(-1,1): 0=\int f = f(c) \cdot 2 \Rightarrow f(c)=0.$

Όμως, η f δεν μηδενίζεται πουθενά

14/5/2012 <u>20ο μάθημα</u>

<u>Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann</u>

<u>Θ.1</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη
Αν $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$ τότε
$m(b-a)\leq \int_{1}^{b} f(x)\,d(x) \leq M(b-a).$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $f\equiv c$ στο $[a,b]$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$

<u>Θ.2</u>: Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες, τότε
η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη. και
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Θ.3</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\lambda\in\mathbb{R}$
τότε η λf είναι ολοκληρώσιμη και
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

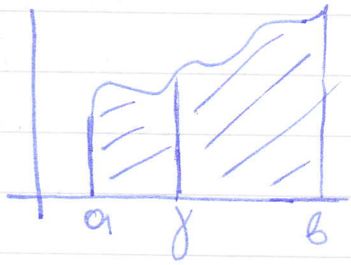
<u>Πόρισμα</u>: (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)
Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
τότε η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και
$$\int(\lambda f+\mu g) = \lambda\int f + \mu\int g$$

Θ.4 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $a<\gamma<b$.

(i.) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε είναι ολ. στα $[a,\gamma]$, $[\gamma,b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx. \quad (*)$$

(ii) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει η $(*)$



Θ.5 (i) Αν $f\geq 0$ τότε $\int f\geq 0$

(ii) Αν $f\geq g$ τότε $\int f\geq\int g$

Θ.6 Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$ ολοκληρώσιμη

Αν $\phi:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής

Τότε η $\phi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Εφαρμογές: i.) $|f|$ ολοκληρώσιμη και

$$-|f|\leq f\leq |f| \Rightarrow -\int|f|\leq\int f\leq\int|f|$$
$$\Rightarrow \left|\int f\right|\leq\int|f|$$

ii.) f^2 ολοκληρώσιμη

iii.) Αν f,g ολοκληρώσιμες τότε

$$f\cdot g=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4} \text{ ολοκληρώσιμη.}$$

Αποδείξεις:

Θεώρημα 1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. $\forall x$ $m\le f(x)\le M$.

· Έστω $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$.

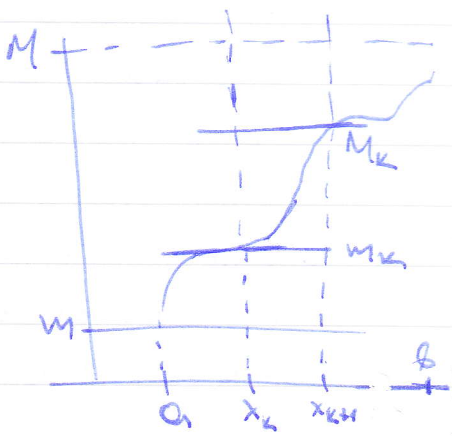
· Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

$m_k=\inf\{\underbrace{f(x):x_k\le x\le x_{k+1}}_{A_k}\}\ge m$

γιατί ο m είναι κάτω φράγμα του A_k

(αν $x_k\le x\le x_{k+1}$ τότε $x\in[a,b]$ ⇝

Όμοια, $M_k\le M$



· Τότε $L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)\ge\sum_{k=0}^{n-1}m(x_{k+1}-x_k)$

$=m\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=m(b-a)$

και όμοια $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)\le\sum M(x_{k+1}-x_k)$

$\le$

$=M(b-a)$

· Τότε $\overline{\int_a^b} f=\inf_P U(f,P)\le M(b-a)$

και $\underline{\int_a^b}$ " $=\sup_P L(f,P)\ge m(b-a)$

$=\int_a^b f$

Πόρισμα: Αν $f\equiv c$ τότε

$c\le f(x)\le c$ για κάθε x.

$\Downarrow$

$c(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le c(b-a)$ Άρα έχουμε ισότητα

Αποδ. (Θεωρ. 2)

Η βασική παρατήρηση: έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$
και έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$

Θέτουμε
$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$$
$$m_k'' = \inf\{g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$$
$$m_k = \inf\{f(x) + g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$$

$\forall\, x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k' \le f(x)$ και $m_k'' \le g(x)$
$\Rightarrow m_k' + m_k'' \le f(x) + g(x)$
Άρα, ο $m_k' + m_k''$ είναι κάτω φράγμα του
$\{f(x) + g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$

$$\Rightarrow \boxed{m_k' + m_k'' \le m_k} \quad (*)$$

Συνεπώς, $L(f,P) + L(g,P) = \sum m_k'(x_{k+1} - x_k) + \sum m_k''(x_{k+1} - x_k)$
$$= \sum (m_k' + m_k'')(x_{k+1} - x_k) \overset{(*)}{\le} \sum m_k (x_{k+1} - x_k) = L(f+g, P).$$

Όμοια: αν $M_k' = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$
$M_k'' = \sup\{g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$
και $M_k = \sup\{f(x) + g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$

$$U(f,P) + U(g,P) \ge U(f+g, P)$$

Από τις δύο έχουμε
$$U(f+g,P) - L(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P) - L(f,P) - L(g,P)$$
$(**)$
$$= (U(f,P) - L(f,P)) + (U(g,P) - L(g,P))$$

Έστω $\varepsilon > 0$

Αφού η f είναι ολοκλ. $\exists\, P_1 : U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon/2$ (κριτ. Riemann)
— η g — " — $\exists\, P_2 : U(g,P_2) - L(g,P_2) < \varepsilon/2$

Αν $P = P_1 \cup P_2$ είναι η κοινή τους εκλέπτυνση τότε
$U(f,P) - L(f,P)$ και $U(g,P) - L(g,P) < \varepsilon/2$ (**)

Τότε, από την (**)
$$U(f+g,P) - L(f+g,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Από το κριτήριο Riemann, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη

Επίσης $L(f,P) \le f \le U(f,P) < L(f,P) + \frac{\varepsilon}{2}$ από την
$L(g,P) \le g \le U(g,P) < U(g,P) + \frac{\varepsilon}{2}$ (***)

$$L(f,P) + L(g,P) \le \int f + \int g < U(f,P) + U(g,P)$$

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P) \le \int (f+g) \le U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P).$$

Άρα
$$\left|\int f + \int g - \int f+g\right| \le U(f,P) + U(g,P) - L(f,P) - L(g,P) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν (***)
$$\int f + \int g - \int f+g = 0.$$

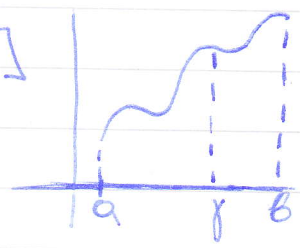
$\delta - \gamma \le Y - X$.

Αποδ (Θεώρ 4)

πρώτα το (ii.)

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ υπάρχει διαμέριση



$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \gamma\}$ του $[a,b]$ ώστε
$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon/2$$
Όμοια, υπάρχει διαμέριση
$P_2 = \{\gamma = x_m < x_{m+1} < \dots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε
$$U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon/2$$

Ορίζουμε $P = P_1 \cup P_2 = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$
Η P είναι διαμέριση του $[a,b]$.
Επίσης $L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)$
και $U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2)$ $\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) = (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Έχουμε $L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P)$

$$\left.\begin{array}{c} L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P) \\ \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ L(f,P_1) + L(f,P_2) \le \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f \le U(f,P_1) + U(f,P_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f - \left(\int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f \right) \right| \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Είδαμε ότι $\forall\, \varepsilon > 0$
$$\left| \int_a^b f - \left(\int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f \right) \right| < \varepsilon$$
άρα $\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f$

(i.) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$
Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε διαμέριση Q του $[a,b]$:
$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon$
Ορίζουμε $P = Q \cup \{\gamma\}$
Τότε $\gamma \in P$ και $U(f,P) - L(f,P) \le U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon.$

Είναι $P = \{a = x_0 < \dots < x_m = \gamma < \dots < x_n = b\}$
Ορίζουμε $P_1 = \{a = x_0 < \dots < x_m = \gamma\}$ διαμέριση του $[a,\gamma]$.
και $P_2 = \{x_m = \gamma < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[\gamma, b]$.

Όπως πριν
$$\left(U(f,P_1)-L(f,P_1)\right)+\left(U(f,P_2)-L(f,P_2)\right)$$
$$= U(f,P)-L(f,P) < \varepsilon$$

Αφού είναι μη αρνητικοί αριθμοί,

$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon \xrightarrow{\text{Κρ. Riemann}} f$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\gamma]$.

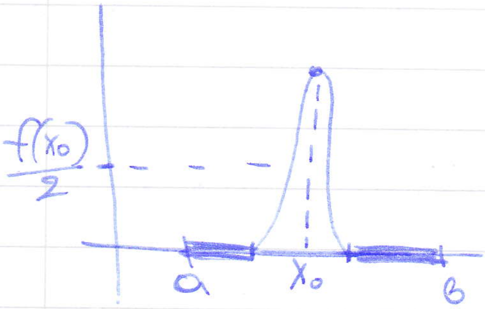
και

$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon \xrightarrow{\text{Κρ. Riemann}} f$ ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,b]$.

Τέλος, από το (ii.)
αφού ξέρουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$
ισχύει η (*).

Βασική άσκηση 14

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f\geq 0$ και υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)>0$. Τότε,
$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$



- Μπορώ να υποθέσω ότι $x_0\in(a,b)$
- Η f είναι συνεχής στο x_0 για $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$ βρίσκω $\delta>0$ (αρκετά μικρό) ώστε $a<x_0-\delta<x_0+\delta<b$ και $\forall\, x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2}$$

Τότε $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx}_{\substack{\geq 0 \text{ γιατί} \\ f(x)\geq 0 \text{ εδώ.}}} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx}_{\substack{\geq 0 \text{ γιατί} \\ f(x)\geq 0 \\ \text{εδώ.}}}$

$$\geq \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx}_{f \geq \frac{f(x_0)}{2} \text{ εδώ.}} \geq \frac{f(x_0)}{2}\big((x_0+\delta)-(x_0-\delta)\big) = \frac{f(x_0)}{2}\cdot 2\delta = f(x_0)\cdot\delta > 0.$$

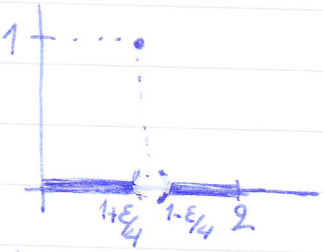
Σημείωση: Για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε

i.) ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

ii.) ότι η f είναι συνεχής στο x_0

iii.) $f(x)\geq 0$ παντού και $f(x_0)>0$.

Παράδειγμα: (η συνέχεια στο x_0 είναι απαραίτητη)



$f:[0,2]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} 0, & x\neq 1 \\ 1, & x=1. \end{cases}$

· Η f είναι ολοκληρώσιμη γιατί έχει μόνο ένα σημείο ασυνέχειας.

· Έχουμε $f(1)>0$, $f\geq 0$ παντού και $\int f = 0$.

(α.) $\int f \geq 0$ γιατί $f\geq 0$

Παίρνω $P=\{0<1-\varepsilon/4<2\}$

Τότε $U(f,P)=1\cdot\left(1+\varepsilon/4-(1-\varepsilon/4)\right)=\varepsilon/2<\varepsilon$.

(β.) Έστω $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$) Υπάρχει P: $U(f,P)<\varepsilon \Rightarrow \int f \leq U(f,P)<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\int f \leq 0$.