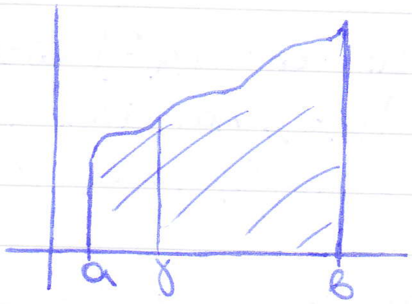
4/5/2012 17ο μάθημα

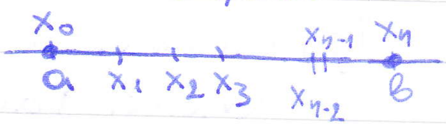
Ολοκλήρωμα Riemann



1) Διαμερίσεις κλειστών διαστημάτων

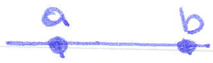
Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα.

α) Διαμέριση του $[a,b]$ λέμε κάθε πεπερασμένο σύνολο $P = \{x_0=a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n=b\}$ σημείων του $[a,b]$.



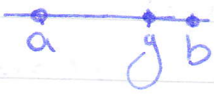
Συνήθως διατάσσουμε τα σημεία της P: $x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.
και γράφουμε $P=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$

Παραδείγματα: $P_1=\{a,b\}$

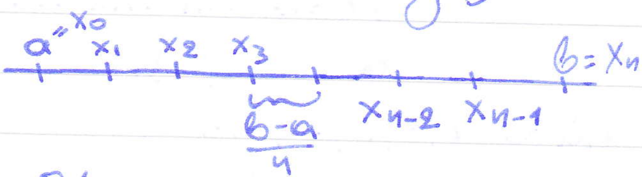


Η διαμέριση του $[a,b]$.

$P_2=\{a<y<b\}$



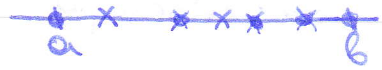
σε n ευθ. τμήματα:



$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k=0,1,\dots,n$$

β) Πλάτος της διαμέρισης $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ είναι το μέγιστο μήκος υποδιαστημάτων από αυτά που ορίζει η P: $\|P\| = \max\{x_{k+1}-x_k : k=0,\dots,n-1\}$

γ.) Μια διαμέριση Q του $[a,b]$ λέγεται <u>εκλέπτυνση</u> της P αν $\boxed{P \subseteq Q}$ (η Q έχει περισσότερα σημεία).



<u>Παρατήρηση:</u>
Αν P και Q είναι δυο διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε το $P \cup Q$ είναι επίσης διαμέριση του $[a,b]$. και είναι η μικρότερη διαμέριση του $[a,b]$ που περιέχει και την P και την Q.
Η $P \cup Q$ λέγεται η <u>κοινή εκλέπτυνση</u> των P και Q.

<u>Σημείωση:</u> Αν P, Q διαμερίσεις του $[a,b]$. τότε το $P \cap Q$ είναι επίσης διαμέριση του $[a,b]$.

2.) <u>Διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος Riemann</u> (κατά Darboux.)

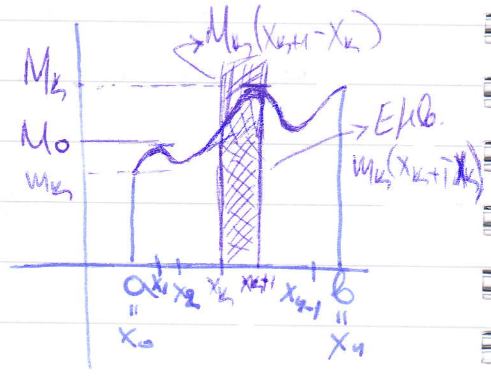
Θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα <u>φραγμένων</u> συναρτήσεων $f: \underbrace{[a,b]}_{\text{κλ. διάστημα}} \to \mathbb{R}$

<u>Πρώτο βήμα:</u> Σταθεροποιούμε διαμέριση
$P: \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$
του $[a,b]$.

- Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$

$M_k = M_k(f) = M_k(f,P) = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$
και $m_k = m_k(f) = m_k(f,P) = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$

Οι m_k, M_k ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ άρα είναι φραγμένη στο $[x_k, x_{k+1}]$.
$\Rightarrow$ το $\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$ είναι φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ έχει supremum και infimum



Κατόπιν ορίζουμε: το <u>κάτω άθροισμα της f ως προς την P</u>

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)(x_{k+1}-x_k)$$

και το <u>άνω άθροισμα της f ως προς την P</u>

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(f)(x_{k+1}-x_k).$$

<u>Βασικό Λήμμα</u>: Αν P, Q είναι δυο διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε

$$L(f,P) \le U(f,Q).$$

<u>Σημείωση</u>: Προφανώς, $L(f,P) \le U(f,P)$ γιατί

$$\forall k \quad m_k \le M_k \xRightarrow[x_{k+1}-x_k>0]{} \forall k \quad m_k(x_{k+1}-x_k) \le M(x_{k+1}-x_k)$$

$$\Rightarrow L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) = U(f,P)$$

<u>Βασικό Υπολήμμα</u>:

Αν P, R διαμερίσεις και $P \subseteq R$ <u>τότε</u> $L(f,P) \le L(f,R)$ ενώ $U(f,P) \ge U(f,R)$.

<u>Απόδ</u> του βασικού λήμματος

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $R = P \cup Q$. των P και Q

Από το Υπόλημμα, $P \subseteq R \Rightarrow L(f,P) \le L(f,R)$

Επίσης $L(f,R) \le U(f,R)$.

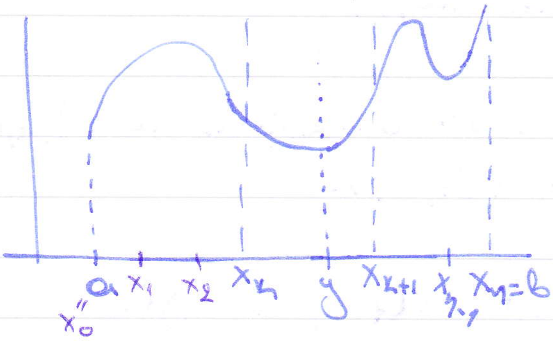
$Q \subseteq R \Rightarrow U(f,R) \le U(f,Q)$

Άρα, $L(f,P) \le U(f,Q)$.

Απόδειξη του υπολήμματος

Παίρνω διαμέριση P του $[a,b]$ και θεωρώ την $Q=P\cup\{y\}$, για κάποιο $y\in[a,b]$, $y\notin P$

Υπάρχει $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ ώστε $x_k<y<x_{k+1}$



$$L(f,P)=\sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1}-x_j)$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1} m_j(x_{j+1}-x_j)+m_k(x_{k+1}-x_k)+\sum_{j=k+1}^{n-1} m_j(x_{j+1}-x_j).$$

$$L(f,Q)=\sum_{j=0}^{k-1} m_j(x_{j+1}-x_j)+m_k(y-x_k)+m_k(x_{k+1}-x_k)+\sum_{j=k+1}^{n-1} m_j(x_{j+1}-x_j)$$

όπου $m_k'=\inf\{f(x): x_k\le x\le y\}$

$m_k''=\inf\{f(x): y\le x\le x_{k+1}\}$

και $m_k=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$

Απ I $\Rightarrow$ $m_k'\geq m_k$, $m_k''\geq m_k$

Άρα

$$L(f,P)-L(f,Q)=m_k(x_{k+1}-x_k)-m_k'(y-x_k)-m_k''(x_{k+1}-y)$$
$$\le m_k(x_{k+1}-x_k)-m_k(y-x_k)-m_k(x_{k+1}-y)$$
$$=m_k(\cancel{x_{k+1}}\cancel{-x_k}\cancel{-y}+\cancel{x_k}\cancel{-x_{k+1}}+\cancel{y})=0$$

Με επαγωγή: αν P διαμέριση και $P\cup\{y_1,y_2,\dots y_s\}$ τότε

$$L(f,P)\le L(f,P\cup\{y_1\})\le L(f,P\cup\{y_1,y_2\})$$
$$\le\dots\le L(f,P\cup\{y_1,y_2,\dots,y_s\})=L(f,Q).$$

Μετά είπαμε ότι: αν P,Q είναι τυχαίες διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε:

$$L(f,P)\le L(f,P\cup Q)\le U(f,P\cup Q)\le U(f,Q)$$

Τρίτο βήμα: Ορίζουμε $A(f) = \{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$
και $B(f) = \{U(f,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$

Το $A(f)$ είναι άνω φραγμένο

Η f είναι φραγμένη: $\exists\, M>0 \;\forall\, x\in[a,b]\; f(x)\le M$

Τότε $\forall P$ $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)(x_{k+1}-x_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} M(x_{k+1}-x_k) =$
$= M(b-a).$

Συνεπώς, υπάρχει το
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup A(f) = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Το $B(f)$ είναι κάτω φραγμένο:

$\exists\, m\in\mathbb{R} \;\forall\, x\in[a,b]\; f(x)\ge m.$

$\Downarrow$

$\forall P$ $U(f,P)\ge m(b-a)$

Συνεπώς, υπάρχει το $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf B(f) =$
$= \inf\{U(f,Q) : Q \text{ διαμ. του } [a,b]\}.$

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση
Λέμε ότι η f είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> (κατά Darboux)
αν $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

Αν αυτό ισχύει, η κοινή αυτή τιμή I είναι το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με:
$\int_a^b f(x)dx$ ή $\int_a^b f$.

Παραδείγματα:

(α.) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Έστω P διαμέριση του $[0,1]$

$P:\{0=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=1\}$

Η f παίρνει τις τιμές 0 και 1 σε κάθε $[x_k,x_{k+1}]$ (υπάρχουν ρητοί και άρρητοι στο $[x_k,x_{k+1}]$). και μόνο αυτές

Άρα, $M_k=1$, $m_k=0$ $\Rightarrow L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=0$

$$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

$$=\sum(x_{k+1}-x_k)=1.$$

$A(f)=\{L(f,P):P \text{ διαμ.}$
$=\{0\}$

$\Rightarrow \underline{\int} f=\sup A(f)=0$

Όμοια $B(f)=\{U(f,P):P \text{ διαμ}$
$=\{1\}.$

$\Rightarrow \overline{\int} f=1.$

Αφού $\underline{\int} f=0<1=\overline{\int} f$ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

9/5/2012

Ολοκλήρωμα Riemann : ο ορισμός του Darboux

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση

• Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$.

• Για κάθε $k = 0,1,2,\dots,n-1$ έχουμε

$m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$

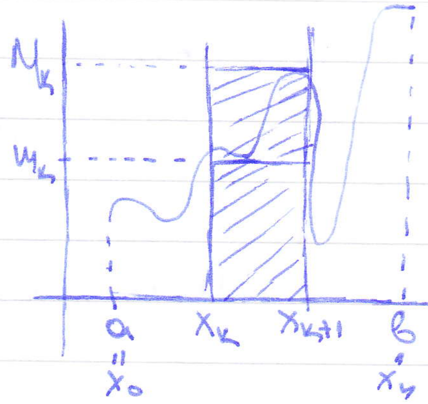
και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$

(L : κάτω άθροισμα)

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

(U: άνω άθροισμα της f ως προς την P)



ΛΗΜΜΑ: Αν $P \subseteq Q$ τότε $L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$

Πρόταση: Αν P και Q είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε

$$\boxed{L(f,P) \le U(f,Q)}$$

(Απ: Θεωρώ την $P \cup Q$ $\supseteq P$, $\supseteq Q$ και εφαρμόζω το Λήμμα

$$L(f,P) \le L(f,P\cup Q)$$
$$\le U(f,P\cup Q)$$
$$\le U(f,Q)$$
)

· Ορίζουμε $A(f) = \{L(f,P) : P \text{ διαμ.}\}$

$B(f) = \{U(f,Q) : Q \text{ διαμ.}\}$.

Το $A(f)$ είναι άνω φραγμένο από οποιοδήποτε $U(f,Q)$. (ή από το $\delta(b-a)$) και το $B(f)$ είναι κάτω φραγμένο από οποιοδήποτε $L(f,P)$ (ή από το $\gamma(b-a)$).

Παρατήρηση: $\exists\ \gamma, \delta$ f φρ $\Rightarrow \forall x \quad \gamma \le f(x) \le \delta$

Τότε: $\forall P\ \forall k \quad \gamma \le m_k \le M_k \le \delta$

$$\Rightarrow L(f,P) = \sum (m_k(x_{k+1} - x_k))$$

$$\gamma(b-a) \overset{\le}{} \qquad \le \sum M_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$\le \delta \sum (x_{k+1} - x_k) = \delta(b-a).$$

Όμοια, $\gamma(b-a) \le U(f,P)$

$$\le \delta(b-a)$$

· Ορίζουμε $\underline{\int_a^b} f = \sup A(f) = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμ}\}$

και

$$\overline{\int_a^b} f = \inf B(f) = \inf\{U(f,Q) : Q \text{ διαμ}\}.$$

Παρατήρηση: $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$

Γιατί: Έστω Q διαμ. του $[a,b]$

Για κάθε P έχουμε $: L(f,P) \le U(f,Q)$

$\Rightarrow U(f,Q)$ είναι άνω φράγμα του $A(f)$

$\Rightarrow U(f,Q) \ge \sup A(f) \overset{\text{ορ}}{=} \underline{\int_a^b} f.$

Τότε, ο $\underline{\int_a^b} f$ είναι κάτω φράγμα του $B(f)$

(είναι $\le U(f,Q)$ για κάθε Q).

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le \inf B(f) \overset{\text{ορ}}{=} \overline{\int_a^b} f$

Ορισμός: Αν $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ τότε λέμε ότι η f είναι

ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα

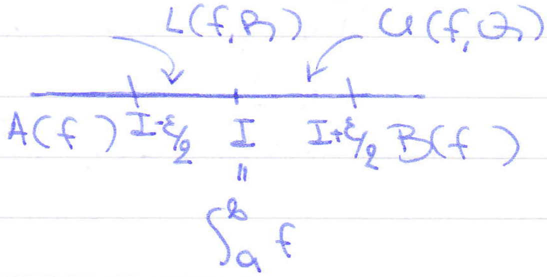
$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

① Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα (πρώτη μορφή): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη
$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $P \overset{\text{"}}{=} P_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε
$0 \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$



Αφού $I = \int_a^b f = \sup A(f)$.

υπάρχει στοιχείο x του $A(f)$: $I-\varepsilon/2 < x$.
Δηλ. $\exists$ διαμέριση P_1 του $[a,b]$ ώστε $I-\varepsilon/2 < x = L(f,P_1)$.

Όμοια, αφού $I = \inf B(f)$, υπάρχει διαμέριση Q_1 του $[a,b]$ ώστε $\underbrace{U(f,Q_1)}_{\text{στοιχείο του } B(f)} < I+\varepsilon/2$

Δηλ. $I-\varepsilon/2 < L(f,P_1) \overset{\text{Πρ.}}{\le} U(f,Q_1) < I+\varepsilon/2$

Θεωρούμε την $P = Q_1 \cup P_1$. Από το λήμμα
$I-\varepsilon/2 < \cancel{L(f,P_1)} \le L(f,P) \le U(f,P) \le \cancel{U(f,Q_1)} < I+\varepsilon/2$

$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) < I+\varepsilon/2 - (I-\varepsilon/2) = \varepsilon$

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι: $\forall\ \varepsilon>0$
$\overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \varepsilon$ $\Big\}$ $\xrightarrow{\text{Απ I}}$ $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$

αλλά ισχύει και η αντίστροφη, άρα είναι ίσα
$\overset{\text{ορ.}}{\Longrightarrow}$ f ολοκληρώσιμη.

Έστω $\varepsilon>0$. Από την υπόθεση υπάρχει διαμέριση P : $U(f,P) < L(f,P)+\varepsilon$.

Τότε $\overline{\int_a^b} f \underset{\text{ορισμός του άνω ολοκληρώματος}}{\le} U(f,P) < \underbrace{L(f,P)+\varepsilon \le \underline{\int_a^b} f}_{\text{ορσ}} + \varepsilon$

<u>Θεώρημα:</u> (δεύτερη μορφή)

<u>Έστω</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

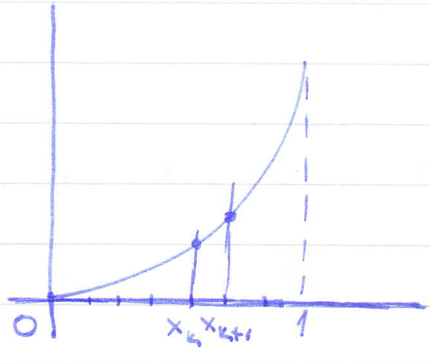
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_n)-L(f,P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

<u>Απόδειξη:</u>

($\Rightarrow$) Παίρνω $\varepsilon=1/n$ και από το προηγούμενο θεώρημα βρίσκω P_n ώστε $0\le U(f,P_n)-L(f,P_n) < \underset{\downarrow \atop 0}{1/n}$

<u>Παράδειγμα:</u>

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα τμήματα μήκους $1/n$

$$P_n = \{\underset{x_0}{0} < \underset{x_1}{\tfrac{1}{n}} < \underset{x_2}{\tfrac{2}{n}} < \dots < \underset{x_k}{\tfrac{k}{n}} < \tfrac{k+1}{n} < \dots < \underset{x_n}{\tfrac{n}{n}} = 1\}$$

Για κάθε $k=0,1,2,\dots,n-1$ η f είναι αύξουσα στο $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, άρα $m_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2$, $M_k=\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$

Επίσης, $x_{k+1}-x_k=\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

Τότε $\mathcal{L}(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right)$$

$$\mathcal{U}(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right).$$

(α.) $\mathcal{U}(f,P_n) - \mathcal{L}(f,P_n) = \frac{1}{n^3}\left(\left[1^2 + 2^3 + \dots + (n-1)^2 + n^2\right] - \left[1^2 + \dots + (n-1)^2\right]\right)$

$$= \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη από το κριτήριο του Riemann.

(β.) Υπολογίζουμε το $\mathcal{L}(f,P_n) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right)$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

και το $\mathcal{U}(f,P_n) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

(γ.) Ξέρουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

Άρα, $\forall n$ $\mathcal{L}(f,P_n) \le \int_0^1 x^2\,dx$

$\downarrow$

$1/3$

Όμοια,

$\forall n$ $\int_0^1 x^2\,dx \le \mathcal{U}(f,P_n)$

$\downarrow$

$1/3$

Έπεται ότι

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

② Δυο κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μονότονη.
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Αποδ.

Μπορώ να υποθέσω ότι η f είναι αύξουσα

- Η f είναι φραγμένη: $\forall\, x\in[a,b]$.
  $f(a)\le f(x)\le f(b)$. γιατί $f \nearrow$

- Θεωρώ την διαμέριση

$$P_n=\Big\{\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{a}} < \underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{a+\frac{b-a}{n}}} < \underset{x_2}{\overset{\shortparallel}{a+2\frac{b-a}{n}}} < \dots < a+n\frac{b-a}{n}=b\Big\}.$$

Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n} \qquad x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}$$

$$x_{k+1}=a+(k+1)\frac{b-a}{n}$$

$$m_k=f(x_k) \qquad M_k=f(x_k) \quad \text{γιατί } f \nearrow$$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$U(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})=\frac{b-a}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\big)$$

Άρα $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\dfrac{b-a}{n}\Big(\underset{b}{\underset{\shortparallel}{f(x_n)}}-\underset{a}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}}\Big)=$

$$=\frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα ομοιόμορφα συνεχής.

Συνεπώς, υπάρχει $\delta>0$: αν $y,z\in[a,b]$ και $|y-z|<\delta$ τότε $|f(y)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Τώρα, βρίσκουμε $n\in\mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n}<\delta$ και θεωρούμε την διαμέριση $P_n=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$. σε n ίσα ευθ. τμήματα μήκους $x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}<\delta$ $(k=0,1,\dots,n-1)$.

· Στο $[x_k,x_{k+1}]$ η f είναι συνεχής, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε κάποια σημεία y_k,z_k
Τότε $M_k=f(y_k)$
$m_k=f(z_k)$
$y_k,z_k\in[x_k,x_{k+1}]\Rightarrow|y_k-z_k|\le x_{k+1}-x_k=$
$=\frac{b-a}{n}<\delta$.

Άρα, $|M_k-m_k|=f(y_k)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ $(*)$

Τότε $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{k=0}^{n-1}m_k\cdot\frac{b-a}{n}$

$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\underset{(*)}{<}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}=$

$=\frac{b-a}{n}\cdot n\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}$

Βρήκαμε P: $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

$\xRightarrow[\text{κρ. Riemann}]{}$ f ολοκληρώσιμη