28/3/2012 8º μάθημα

Σειρές πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά με k-οστό όρο τον a_k συμβολίζεται με $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και είναι η ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

Βασικές Ιδιότητες

Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$

Τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t$$

Απόδ. Για την ακολουθία (u_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum(\lambda a_k + \mu b_k)$ ισχύει $u_n = \lambda S_n + \mu t_n$ όπου $(S_n), (t_n)$ οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων $\sum a_k, \sum b_k$ αντίστοιχα.

$$u_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)$$
$$= \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \mu(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$
$$= \lambda S_n + \mu t_n \to \lambda s + \mu t$$

Κριτήριο Cauchy: Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό) ανν ισχύει το εξής: "για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τ.ώ. αν $N \le m < n$ τότε $|a_{m+1} + \dots + a_n| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.

Απόδ.

Ξέρουμε ότι η $\sum a_k$ συγκλίνει ανν η ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει ανν η ακολουθία (S_n) είναι βασική ανν ισχύει το εξής:

"για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τ.ώ. για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $N \le m < n$ να ισχύει $|S_n - S_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Έστω $\sum a_k$ τ.ώ. $a_k \geq 0$ για κάθε k. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$ ανν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων τότε είναι άνω φραγμένη. Αλλιώς, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ τ.ώ. $a_k \geq 0$ για κάθε k και η ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (δηλ. $a_{k+1} \leq a_k$ για κάθε k). Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ανν η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Παρατήρηση: Για κάθε n το μερικό άθροισμα t_n της $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ είναι το $t_n = \sum_{k=0}^{n} (2^k a_{2^k}) = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$

Απόδειξη: Έστω ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $M>0$ τ.ώ. $t_n \leq M$ για κάθε n.

Ας συμβολίσουμε με S_n το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum a_k$

Για κάθε n υπάρχει μοναδικός φυσικός m τ.ώ.

$$2^m \leq n < 2^{m+1}$$

Τότε
$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + \\
&\qquad + (a_{2^m} + a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \dots + a_n) \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + \\
&\qquad + (a_{2^m} + a_{2^m+1} + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{2^{m+1}-1}) \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^m a_{2^m} = t_m \leq M.
\end{aligned}$$

Άρα $S_n \leq M$ για κάθε n, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Έστω τώρα ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε υπάρχει $L>0$ τ.ώ. $S_n \leq L$ για κάθε n.

Τότε για κάθε m: $t_m = \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots 2^m a_{2^m}$

$$\leq a_1 + 2a_2 + (2a_3 + 2a_4) + \dots + 2(a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^m})$$

$$\leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \dots + 2a_{2^m} = 2S_{2^m} \leq 2L.$$

άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα: Οι p-σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ όπου $p>0$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης έχουμε ότι

η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει ανν η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p}$

Όμως $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{p-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ δηλαδή

η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$

άρα συγκλίνει ανν $2^{p-1} > 1 = 2^0$, δηλ. αν $p>1$.

Στην αντίθετη περίπτωση $(p \leq 1)$ η $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει ανν $p>1$ πχ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει, ενώ

η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ όπου $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει ανν $|x|<1$

ii) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, όπου $p>0$

Παρατηρούμε ότι $a_k = \frac{1}{k(\log k)^p} > 0$ για κάθε k και $a_{k+1} \leq a_k$ για κάθε k.

Άρα μπορούμε να επικαλεστούμε το κριτήριο συμπύκνωσης

η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ανν η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Όμως $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum \cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k}(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει ανν $p>1$. Άρα και η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει ανν $p>1$. Αλλιώς, αν $0<p\leq 1$,

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p} = +\infty$.

Παρατήρηση: Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ για την οποία ξέρουμε ότι $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$ για κάποιο $n>1$. Τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$.

Κριτήριο σύγκρισης

Μας δίνονται σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ τ.ώ. $b_k \geq 0$ για κάθε k η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και επίσης για κάθε k

$$|a_k| \leq M \cdot b_k.$$

(ή για κάθε $k \geq k_0$ $|a_k| \leq M b_k$).

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τ.ώ. αν $N \leq m < n$ τότε $\sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon$. Όμως τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τ.ώ. $N \leq m < n$ τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq M \sum_{k=m+1}^{n} b_k < M \cdot \varepsilon$$

Άρα για κάθε $\varepsilon' > 0$ $\exists$ $N = N\left(\frac{\varepsilon'}{M}\right)$ τ.ώ. αν $N \leq m < n$ τότε $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M b_k < M \cdot \frac{\varepsilon'}{M} = \varepsilon'$.

Από το Κριτήριο Cauchy η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Στην περίπτωση που $|a_k| \leq M \cdot b_k$ για κάθε $k \geq k_0$ μπορώ με την ίδια απόδειξη να δείξω ότι $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(επειδή η $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ συγκλίνει)

Τότε όμως και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ π.χ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει

γιατί $\forall k$ $\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$

2/4/2012 9ο μάθημα

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

① Έστω (a_k) ακολουθία με μη αρνητικούς όρους. Τότε η (S_n) είναι αύξουσα. Συνεπώς
"η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η (S_n) είναι φραγμένη".
Αν η (S_n) δεν είναι φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

② Κριτήριο συμπύκνωσης
Έστω (a_k) φθίνουσα με $a_k > 0$ και $a_k \to 0$.
Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Εφαρμογή: i) Οι p-σειρές: η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$

ii) Σειρές της μορφής $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνουν ανν $p > 1$

Απόλυτη σύγκλιση σειράς

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει

Παράδειγμα: Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$

Κοιτάμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - Αυτή συγκλίνει (p-σειρά, με $p = 2 > 1$).

Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

<u>Πρόταση 1</u> Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε την $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Θα δείξουμε ότι συγκλίνει.
Αρκεί να δείξουμε ότι η (s_n) είναι βασική (κεφ I).
Ξέρουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Τότε, η $t_n = |a_1| + \dots + |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η (t_n) είναι βασική.

<u>Ιδέα</u>: αν $n > m$

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| = |t_n - t_m| < \varepsilon$$

αν n, m μεγάλα

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (t_n) είναι βασική, υπάρχει $\boxed{n_0 = n_0(\varepsilon)}$:
$\forall\ n > m \ge n_0 \quad |t_n - t_m| < \varepsilon \quad (*)$

Έχουμε $t_n - t_m = (|a_1| + \dots + |a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_n|)$
$- (|a_1| + \dots + |a_m|) = |a_{m+1}| + \dots + |a_n|$
$\ge |a_{m+1} + \dots + a_n| = |s_n - s_m|$

Άρα $\forall\ n > m \ge n_0$

$|s_n - s_m| \le t_n - t_m = |t_n - t_m| < \varepsilon$ από την $(*)$.

Άρα, η (s_n) είναι βασική.

<u>Παρατήρηση</u>: Πρακτικά η πρόταση χρησιμοποιείται ως εξής:
- Μας δίνει την $\sum a_k$
- Θεωρούμε την $\sum |a_k|$.

- Αν δείξουμε ότι η $\sum |a_k|$ συγκλίνει, τότε συμπεραίνουμε ότι και η $\sum a_k$ συγκλίνει

<u>Παραδείγματα</u>:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ Συγκλίνει;

Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right|$

Αυτή συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει.

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-k)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ αποκλίνει. (Απλώς αυτή η μέθοδος δεν δουλεύει).

Εδώ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

Θεωρούμε την $S_{2m} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}}$

$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2m-1) \cdot 2m}$

$\leq 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2m-1)^2}$

$< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Άρα η (S_{2m}) είναι άνω φραγμένη από την $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ και $(S_{2m}) \nearrow$ γιατί $S_{2m+2} - S_{2m} = \frac{}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} > 0$

Άρα η (S_{2m}) συγκλίνει: $S_{2m} \to a \in \mathbb{R}$.

Τότε $S_{2m-1} = S_{2m} - \frac{(-1)^{2m-1}}{2m-1} \to a - 0 = a$.

Από γνωστή άσκηση (αφού $\lim S_{2m} = \lim S_{2m-1} = a$) παίρνουμε $S_m \to a$. Δηλ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει.

<u>Ορισμός</u>. Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>συγκλίνει υπό συνθήκη</u> αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

(παράδειγμα: η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$)

Κριτήρια σύγκρισης

Θεώρημα 1 Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ δυο σειρές.
Υποθέτουμε ότι:
(α) $b_k \geq 0 \ \forall k$
(β) η $\sum b_k$ συγκλίνει
(γ) υπάρχει $M>0 : \forall k \quad |a_k| \leq M b_k$
Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).

Απόδειξη: Θεωρώ τα μερικά αθροίσματα t_n της $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ και δείχνω ότι μένουν φραγμένα.
Τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.
Ξέρουμε ότι $b_k \geq 0$ και η $\sum b_k$ συγκλίνει.
Άρα η $S_n = b_1 + \dots + b_n$ είναι φραγμένη
Δηλ. $\exists A>0 : \forall n \ S_n = b_1 + \dots + b_n \leq A$.
Τότε $\forall n$

$$\begin{aligned} t_n &= |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \\ &\leq M b_1 + M b_2 + \dots + M b_n \\ &= M(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq MA. \end{aligned}$$

Δηλ. η (t_n) φράσσεται από τον MA.

Θεώρημα 2: (οριακό κριτήριο σύγκρισης)
Έστω ότι $b_k > 0$, η $\sum b_k$ συγκλίνει και υπάρχει το $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R}$. Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Αποδ.
Έχουμε $\frac{a_k}{b_k} \to m \in \mathbb{R}$. Άρα, η $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ είναι φραγμένη.
Δηλ. υπάρχει $M>0$ ώστε $\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M$ για κάθε k.

$\Rightarrow |a_k| \leq M |b_k|$ για κάθε k

Από το Θεώρημα 1 η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.

Θεώρημα 3 (Κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς).

Αν $a_k, b_k > 0$ και $\frac{a_k}{b_k} \to l > 0$.
Τότε, η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum b_k$ συγκλίνει

Αποδ.

$(\Leftarrow)$ Έχουμε ότι $\sum b_k$ συγκλίνει και υπάρχει το $\lim \frac{a_k}{b_k} = l \in \mathbb{R}$.
Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum a_k$ συγκλίνει.

$(\Rightarrow)$ Αφού $\frac{a_k}{b_k} \to l > 0$ (άρα $\neq 0$). Έχουμε $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{l}$

Εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης εναλλάσσοντας τους ρόλους των a_k και b_k:

- η $\sum a_k$ συγκλίνει
- $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{l}$

$\Rightarrow$ η $\sum b_k$ συγκλίνει.

Παράδειγμα:

(α) Μας δίνουν την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$

- Έχουμε $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^3+3}$
- Ορίζουμε $b_k = \frac{1}{k^3} > 0$.
- Η σειρά $\sum b_k = \sum \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει (p-σειρά με $p=3>1$)
- $\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{k+1}{k^4+k^3+3}}{\frac{1}{k^3}} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to 1$

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum a_k$ συγκλίνει.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$

• Έχουμε $a_k = \frac{k+1}{k^2+2}$. Ορίζουμε $b_k = \frac{1}{k}$

• Τώρα $a_k, b_k > 0$ και $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+k}{k^2+2} \to 1 > 0$.

• Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς η $\sum \frac{k+1}{k^2+2}$ συμπεριφέρεται όπως η $\sum \frac{1}{k}$, δηλ. αποκλίνει

αρμονική $(p=1)$.

(γ) $\sum \frac{\sqrt{k}+2}{k^2-7k+5}$

έχει ισοδύναμη συμπεριφορά

$\sum \frac{1}{k^{3/2}}$

<u>Άσκηση 24</u>: Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές.

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

• Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^{1+1/k}}$

• Ορίζουμε $b_k = \frac{1}{k}$

• Έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k^{1+1/k}}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k \cdot k^{1/k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$.

(γιατί $\sqrt[k]{k} \to 1$)

Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η $\sum \frac{1}{k^{1+1/k}}$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum \frac{1}{k}$, δηλ. αποκλίνει.

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ για ποια $p\in\mathbb{R}$ συγκλίνει και για ποια αποκλίνει;

$$\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{k+1-k}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

• Ορίζουμε $b_k=\frac{k^p}{k^{3/2}}$

Τότε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{k^p\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}}{\frac{k^p}{k^{3/2}}}=\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\to\frac{1}{2}>0.$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ συμπεριφέρεται σαν την

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^p}{k^{3/2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2-p}}$ η οποία συγκλίνει αν

$3/2-p>1 \Leftrightarrow p<\frac{1}{2}$

Άσκηση 30

Έχουμε $a_k>0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι οι σειρές
1.) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, 2.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}$, 3.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν επίσης.

1.) $\sum a_k$ συγκλίνει

Ορίζουμε $b_k=a_k^2$

Έχουμε $\frac{b_k}{a_k}=\frac{a_k^2}{a_k}=a_k\to 0$ (γιατί $\sum a_k$ συγκλίνει).

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

2.) • $\sum a_k$ συγκλίνει

• Ορίζουμε $\gamma_k=\frac{a_k}{1+a_k}$

Έχουμε

$$\frac{\gamma_k}{a_k}=\frac{\frac{a_k}{1+a_k}}{\frac{a_k}{1}}=\frac{1}{1+a_k}\to\frac{1}{1+0}\to 1$$

ΟΚΣ $\Rightarrow \sum\frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

3) Ορίζουμε $\delta_k = \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$

$\frac{\delta_k}{a_k} = \frac{a_k}{1+a_k^2} \to \frac{0}{1+0^2} = 0$ Από ΟΚΣ. η $\sum \delta_k = \sum \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνει.

Άλλος τρόπος για το 1

Αφού η $\sum a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$.

Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0$ $a_k < 1$.

Τότε, $\forall k \geq k_0$ $a_k^2 < a_k$

και η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει

$\Downarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει

Άσκηση 25

Αν $a \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

$\frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ | Αν $a_k = 0$, έχουμε $\frac{a_k}{1+k^2 a_k} = 0 < \frac{1}{k^2}$

| Αν $a_k > 0$, έχουμε $\frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}$

Δηλ. $0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Όμως, η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\underset{\text{κριτήριο σύγκρισης}}{\Rightarrow}$ η $\sum \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

Άσκηση 31

Αν $a_k \geq 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει.

* Αν η (a_k) είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

$\sqrt{AB} \leq \frac{A+B}{2}$ αν $A, B \geq 0$

Έχουμε $\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2} a_{k+1}$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ συγκλίνει

άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Θεώρημα $\Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}\right)$ συγκλίνει

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει

Έστω ότι $(a_k)\downarrow$ και η $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει.

$$0\le a_{k+1}=\underbrace{\sqrt{a_{k+1}\cdot a_{k+1}}\le\sqrt{a_k a_{k+1}}}_{\le}$$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}=a_2+a_3+a_4+\dots=\sum_{k=2}^{\infty}a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 32

Αν $a_k\ge 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει

Έχουμε $\frac{\sqrt{a_k}}{k}=\sqrt{\underset{A}{a_k}\cdot\underset{B}{\frac{1}{k^2}}}\le\underbrace{\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}}_{\frac{A+B}{2}}$

Οι $\sum a_k,\sum\frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, άρα η $\sum\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\right)$ συγκλίνει.
Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Το κριτήριο του λόγου

Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k\neq 0$ για κάθε k

(α) Αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\to l<1$ τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\to l>1$ τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη

(β) 

Παίρνω s: $1<s<l$.

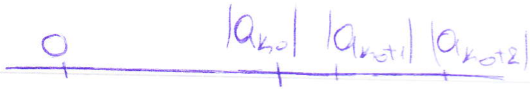
Αφού $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\to l>s$, υπάρχουν $k_0\in\mathbb{N}$: $\forall\, k\ge k_0$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\ge s$ $\Big\{$ ορισμός του ορίου με $\varepsilon=l-s>0$

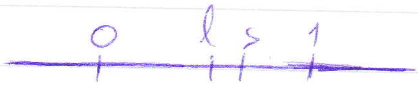
Τότε $\forall\, k\ge k_0$ $|a_{k+1}|\ge s|a_k|>|a_k|$.

Τότε, $|a_k| \geq |a_{k_0}|$ $\forall$ $k \geq k_0$

$\Rightarrow |a_k| \not\to 0 \Rightarrow a_k \not\to 0$

$\Rightarrow \sum a_k$ αποκλίνει.



α)  Βρίσκω s: $l<s<1$.

Αφού $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to l < s$, υπάρχει k_0: $\forall$ $k \geq k_0$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < s$

ορισμός του ορίου με $\varepsilon = s - l$

Δηλ. $|a_{k_0+1}| \leq s|a_{k_0}|$

$|a_{k_0+2}| \leq s|a_{k_0+1}| \leq s^2|a_{k_0}|$

$\vdots$

Επαγωγικά $\to \underbrace{|a_k|} \leq s^{k-k_0}|a_{k_0}| = \overbrace{\left(\frac{|a_{k_0}|}{s^{k_0}}\right)}^{M} s^k$

Όμως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} s^k$ συγκλίνει γιατί $s<1$.

Από κριτήριο σύγκρισης η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.

<u>Βασική σειρά</u> (ή γεωμετρική)

Αν $0<s<1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} s^k$ συγκλίνει

<u>Αποδ.</u> $S_n = s+s^2+s^3+\ldots+s^n = s(1+s+s^2+\ldots+s^{n-1})$