Στο τρίτο βήμα, ορίζω: $M = \max\{3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k_1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2}\}$
Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists k_3$ ώστε $a_{k_3} > M$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a_{k_3} > 3 \\ \text{και } a_{k_3} > a_1 \\ \quad a_{k_3} > a_2 \\ \quad \vdots \\ a_{k_3} > a_{k_2} \end{array}\right\} \Rightarrow k_3 > k_2$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
ώστε $a_{k_n} > n \Rightarrow a_{k_n} \to +\infty$

16/3/2012 3ο μάθημα

Ερωτήσεις Κατανόησης (συνέχεια).

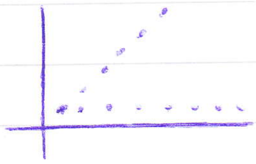
3) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.
Σωστό: έχουμε δείξει ότι αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$

4.) Αν η (a_n) δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία
Σωστό: Στην απόδειξη του B-W είδαμε ότι: αν η (a_n) δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής και τότε είδαμε ότι μπορούμε να ορίσουμε γνησίως αύξουσα υπακολουθία της.

6.) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία
Λάθος
Από το Θ. B-W αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

7] Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.

ΛΑΘΟΣ



Η $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

δεν είναι φραγμένη γιατί $a_{2n-1} = 2n-1 \to +\infty$

αλλά η $a_{2n} \equiv 1$ είναι σταθερή

άρα φραγμένη.

8] Αν η (a_n) είναι αύξουσα τότε κάθε υπακολουθία της είναι αύξουσα.

ΣΩΣΤΟ

Ο ορισμός της αύξουσας ακολουθίας είναι ο εξής:

(a_n) αύξουσα $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$

Από τον ορισμό έπεται ότι: αν $s, m \in \mathbb{N}$ και $s < m$

τότε $a_s \leq a_m$ (*)

Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n)

Αφού $k_n < k_{n+1}$ βάζοντας $s = k_n$ και $m = k_{n+1}$ στην (*)

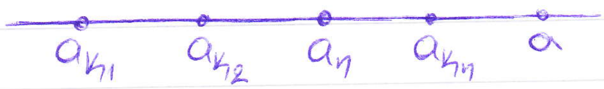
παίρνουμε $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}} \Rightarrow (a_{k_n})$ αύξουσα.

9] Αν η (a_n) είναι αύξουσα και κάποια υπακολουθία $a_{k_n} \to a$ τότε $a_n \to a$

ΣΩΣΤΟ

Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, η (a_{k_n}) είναι επίσης αύξουσα (από ερώτηση 8)

Αφού η (a_{k_n}) είναι αύξουσα και συγκλίνει στον a, ο a είναι άνω φράγμα για το $\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ (Απ. I)



Ισχυρισμός: $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\leq a$. Έχουμε $k_n\geq n \overset{(a_n)\uparrow}{\Rightarrow} a_n\leq a_{k_n}$ και $a_{k_n}\leq a$

$\Rightarrow$ $a_n\leq a$. Τώρα ξέραμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το a, άρα συγκλίνει.

Έστω ότι $a_n\to b \Rightarrow \underset{\underset{a}{\downarrow}}{a_{k_n}}\to b \Rightarrow b=a$.

Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας ($\limsup a_n$, $\liminf a_n$)

① Αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει, τότε κάθε υπακολουθία της (a_{k_n}) συγκλίνει και μάλιστα $a_{k_n}\to a$.

② Υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες, οι οποίες δεν συγκλίνουν. Όλες αυτές έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες (B-W).

Παράδειγμα: $a_n=(-1)^n$ δεν συγκλίνει

$a_{2n}\equiv 1\to 1$

$a_{2n-1}\equiv -1\to -1$ συγκλίνουσες υπακολουθίες.

Ορισμός: (οριακό σημείο)

Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο (ή υπακολουθιακό όριο) της (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n}\to x$

(για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι τα οριακά σημεία της $a_n=(-1)^n$ είναι ο 1 και ο -1).

Πρόταση (χαρακτηρισμός του οριακού σημείου)

Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν:

για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε $m\in\mathbb{N}$, υπάρχει $n\geq m$ ώστε $|a_n-x|<\varepsilon$. ⊛

(δηλ. αν "οσοδήποτε κοντά" στο x μπορούμε να βρούμε όρους της (a_n) με "οσοδήποτε μεγάλο δείκτη").

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άρα υπάρχει κάποια $a_{k_n} \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $m \in \mathbb{N}$.
Αφού $a_{k_n} \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$ $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$.
Επίσης $k_n \geq n \Rightarrow k_n \to +\infty \Rightarrow$ υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε $k_n \geq m$
Για κάθε τέτοιον n έχουμε $k_n \geq m$ και $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$.
Δηλ. ισχύει η ⊛.

($\Leftarrow$) Παίρνω $\varepsilon = 1$ Από την ⊛ βρίσκω $k_1 \geq 1$ ώστε
$|a_{k_1} - x| < 1$.

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = k_1 + 1$
Από την ⊛ βρίσκω $k_2 \geq m = k_1 + 1$. ώστε $|a_{k_2} - x| < \frac{1}{2}$
$\Rightarrow k_2 > k_1$

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{3}$ και $m = k_2 + 1$ Από την ⊛ βρίσκω $k_3 \geq m = k_2 + 1$
$\Rightarrow k_3 > k_2$ ώστε $|a_{k_3} - x| < \frac{1}{3}$
Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$
ώστε $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|a_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$

Τότε i.) η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) (διότι (k_n) γνησίως αύξουσα)

ii.) $$\underbrace{x - \tfrac{1}{n}}_{\downarrow\, x} < a_{k_n} < \underbrace{x + \tfrac{1}{n}}_{\downarrow\, x} \Rightarrow a_{k_n} \to x$$

Άρα, ο x είναι οριακό σημείο (υπακολουθιακό όριο) της (a_n)

Ορισμός του $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$
Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Από το Θ. Β-W υπάρχει $a_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$ (υπάρχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία).
Κάθε τέτοιος x είναι οριακό σημείο της (a_n)
Ορίζουμε $K = \{x \in \mathbb{R} : \text{ο } x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\}$

① Το K είναι μη κενό (Θ. B-W)
② Έχουμε: υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$: $a \le a_n \le b$ για κάθε n. διότι η (a_n) είναι φραγμένη. Αν λοιπόν $x \in K$, τότε $\exists\, a_{k_n} \to x$ και $a \le a_{k_n} \le b \Rightarrow a \le x \le b$.
$$a_{k_n} \to x$$

Δηλ. $K \subseteq [a,b] \Rightarrow$ το K είναι φραγμένο
Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχουν το $\sup K$ κ' το $\inf K$

Πρόταση: Το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο
Δηλ. $\sup K \in K$ και $\inf K \in K$.

Απόδειξη: Θέτουμε $x = \sup K$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in K$ δηλ. ότι $x =$ οριακό σημείο της (a_n).
Αρκεί να δείξουμε ότι ο x ικανοποιεί την ⊛

Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $m \in \mathbb{N}$
- Αφού $x = \sup K$, υπάρχει $y \in K$ ώστε $x - \frac{\varepsilon}{2} < y < x$ (εφαρμόζω $\frac{\varepsilon}{2}$-χαρακτηρισμό του supremum).
- Ο y είναι οριακό σημείο της (a_n).

Από την ⊛ υπάρχει $n \ge m$ ώστε $|a_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$
Τότε $n \ge m$ και $|a_n - x| \le \underbrace{|a_n - y|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|y - x|}_{\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

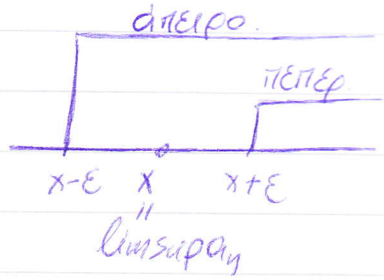
Αφού τα $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόντα, ο x ικανοποιεί την ⊛ δηλ. $\underset{\sup K}{\overset{\shortparallel}{x}} \in K$.

Ορισμός και Θεώρημα: Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Το σύνολο K των οριακών σημείων της (a_n) έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. Αυτά τα συμβολίζουμε με
$$\underset{\max K}{\overset{\shortparallel}{\limsup a_n}} \quad \text{και} \quad \underset{\min K}{\overset{\shortparallel}{\liminf a_n}} \quad \text{αντίστοιχα}$$
Αν (a_{k_n}) είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (a_n) τότε
$\liminf a_n \le \lim a_{k_n} \le \limsup a_n$

Περιγραφή του $\limsup a_n$

Έστω $\varepsilon > 0$

<ins>Ισχυρισμός:</ins> Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq x-\varepsilon\}$ είναι άπειρο.



<ins>Απόδειξη:</ins>

Έστω ότι άπειροι όροι της (a_n) είναι $\geq x+\varepsilon$.

Ισοδύναμα, υπάρχει (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) ώστε $a_{k_n} \geq x+\varepsilon$ για κάθε n.

Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists\, a_{k_{\mu_n}} \to y \in \mathbb{R}$.

Όμως $a_{k_{\mu_n}} \geq x+\varepsilon \Rightarrow y = \lim a_{k_{\mu_n}} \geq x+\varepsilon$.

Όμως, η $(a_{k_{\mu_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_n), άρα

$$x+\varepsilon \leq y \leq \sup K = x$$

Άτοπο

Από την άλλη πλευρά, $\exists\, a_{s_n} \to x$ $(x \in K)$.

$\Rightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x-\varepsilon < a_{s_n} < x+\varepsilon$

$\Downarrow$

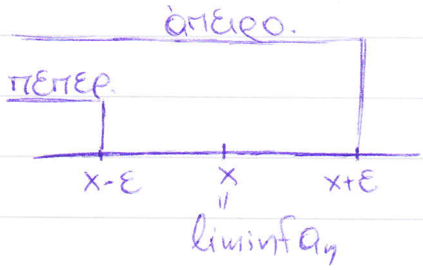
άπειροι όροι της (a_n) είναι $> x-\varepsilon$.

<ins>Αντίστροφα:</ins> αν (a_n) είναι φρ. ακολουθία, $x \in \mathbb{R}$ και ο x ικανοποιεί την $(*)$ τότε $x = \limsup a_n$.

(Άσκηση για το σπίτι). — θα γίνει στο επόμενο μάθημα

Περιγραφή του $\liminf a_n$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x+\varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο



<u>Σημείωση:</u> Η υπακολουθία της υπακολουθίας είναι υπακολουθία και συναφή ερωτήματα.

$\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$

k γν. αύξουσα.

Η $a \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ άρα είναι ακολουθία.

$(a \circ k)(n)$
$= a(k(n))$
$= a(k_n)$
$= a_{k_n}$

<u>Υπακολουθία της $a \circ k$</u>

$\mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N} \xrightarrow{a \circ k} \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$

λ γν. αύξουσα

Είναι $(a \circ k) \circ \lambda = a \circ (k \circ \lambda)$

και $k \circ \lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και γν. αύξουσα.

Άρα, η $(a \circ k) \circ \lambda$ είναι υπακολουθία της αρχικής

<u>Πως θα τη συμβολίζουμε;</u>

$(a \circ k \circ \lambda)(n) = (a \circ k)(\lambda(n)) = (a \circ k)(\lambda_n)$

$= a(k(\lambda_n)) = a(k_{\lambda_n}) = a_{k_{\lambda_n}}$

19/3/2012 4º μάθημα

Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Ορισμός (οριακό σημείο).
Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο (ή υπακολουθιακό όριο) της (a_n) αν υπάρχει (a_{k_n}) ώστε $a_{k_n} \to x$.

① Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε $a_{k_n} \to a$.
② Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Ορίζουμε

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ οριακό σημείο της } (a_n)\}$$

a) $K \neq \emptyset$: από το Θ. Bolzano-Weierstrass η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (και το όριο της ανήκει στο K).
b) Το K είναι φραγμένο γιατί η (a_n) είναι φραγμένη. Άρα, υπάρχουν το $\sup K$, $\inf K$.

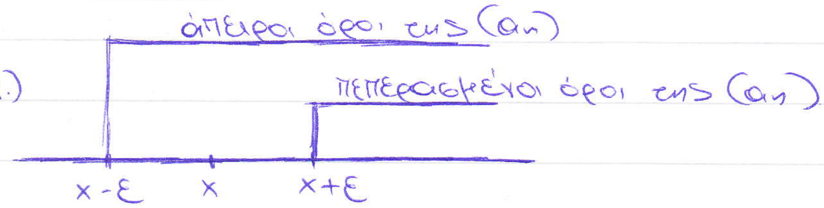
Θεώρημα: Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε έχει μέγιστο και ελάχιστο υπακολουθιακό όριο: υπάρχουν τα $\max K$ και $\min K$.
Θέτουμε $\limsup a_n = \max K$, $\liminf a_n = \min K$.

Χρησιμοποιήθηκε ο εξής χαρακτηρισμός του οριακού σημείου:
x οριακό σημείο της $(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \geq m : |a_n - x| < \varepsilon$.

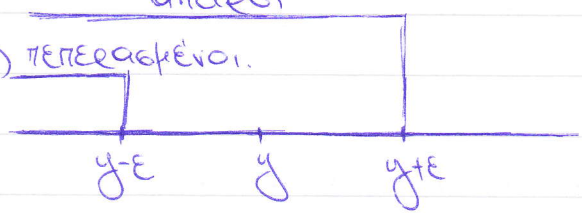
Θεώρημα:
Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και έστω $x, y \in \mathbb{R}$.
a) $x = \limsup a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.
b) $y = \liminf a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < y - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < y + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

Σχηματικά

α.)



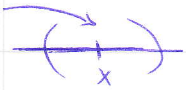
β.)



Απόδειξη:

α.) (⇒) Έστω $\varepsilon>0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει $a_{k_n} \to x$

(ο x είναι οριακό σημείο της (a_n)).



Αφού $a_{k_n} \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad x-\varepsilon < a_{k_n} < x+\varepsilon$

Δηλαδή άπειροι όροι της (a_n) είναι $> x-\varepsilon$ $(a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, a_{k_{n_0+2}} \ )$

$\Downarrow$

$\{m \in \mathbb{N} : a_m > x-\varepsilon\}$ άπειρο.

Έστω ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι $> x+\varepsilon$ (απαγωγή σε άτοπο).

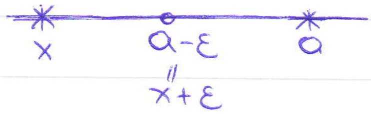
Αυτοί σχηματίζουν υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n).

Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη $\Rightarrow$ υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ της (a_n) με $(a_{k_{\lambda_n}}) \to y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } a_{k_{\lambda_n}} > x+\varepsilon \Rightarrow y = \lim a_{k_{\lambda_n}} \geq x+\varepsilon \\ \text{Όμως } y \in K,\ y = \max K \Rightarrow y \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow x+\varepsilon \leq x \Rightarrow \varepsilon \leq 0 \quad \text{Άτοπο.}$$

α) (⇐) Υποθέτουμε ότι ο x ικανοποιεί την ⊛
Θέτουμε $a=\limsup a_n$. Ξέρουμε ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής τρία: $x<a$ ή $x>a$ ή $x=a$ → το ζητούμενο

i) Έστω ότι $x<a$. Υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $x+\varepsilon=a-\varepsilon$
(είναι ο $\varepsilon=\frac{a-x}{2}>0$)

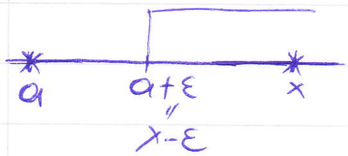


Αφού $a=\limsup a_n$ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>a-\varepsilon\}$ είναι άπειρο (από την κατεύθυνση ⇒)

Αφού ο x ικανοποιεί την ⊛ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

Άτοπο.
Αυτά τα δυο σύνολα συμπίπτουν διότι $a-\varepsilon=x+\varepsilon$

ii) Έστω ότι $x>a$
Βρίσκουμε $\varepsilon>0$: $a+\varepsilon=x-\varepsilon$



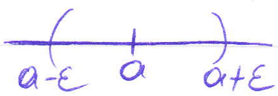
• $\{n\in\mathbb{N}: a_n>x-\varepsilon\}$ άπειρο από την ⊛
• $\{n\in\mathbb{N}: a_n>a+\varepsilon\}$ πεπερασμένο διότι $a=\limsup a_n$ (από την ⇒)

Άτοπο: το ίδιο σύνολο είναι πεπερασμένο και άπειρο.

<u>Πρόταση</u>: Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Τότε, η (a_n) συγκλίνει σε πρ. αριθμό ⇔ $\limsup a_n=\liminf a_n$

<u>Αποδ.</u>
(⇒) Αν $a_n\to a$ τότε κάθε $a_{k_n}\to a$.
Τότε το μόνο οριακό σημείο της (a_n) είναι ο a
$\Rightarrow K=\{a\} \Rightarrow \max K=\min K=a \Rightarrow \limsup a_n=\liminf a_n=a$.

(⇐) Θέτουμε $a=\limsup a_n=\liminf a_n$ και θα δείξουμε ότι $a_n\to a$.
Έστω $\varepsilon>0$



Αφού $a = \limsup a_n$, το προηγούμενο θεώρημα μου λέει ότι το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > a+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Αφού $a = \liminf a_n$, το ίδιο θεώρημα μου λέει ότι το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

Άρα, όλοι τελικά οι όροι a_n ικανοποιούν την $a-\varepsilon \leq a_n \leq a+\varepsilon$

Δηλ. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_0$ $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Έπεται ότι $a_n \to a$.

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

① Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε έχουμε δει ότι υπάρχει $a_{k_n} \to +\infty$. Με μια έννοια το $+\infty$ είναι οριακό σημείο της (a_n). Συμφωνούμε να γράφουμε $\limsup a_n = +\infty$ σε αυτή την περίπτωση.

② Αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε υπάρχει $a_{k_n} \to -\infty$. Συμφωνούμε να γράφουμε $\liminf a_n = -\infty$.

③ Αν η (a_n) δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη, τότε $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

<u>Άσκηση 18</u>

Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο της ακολουθίας $a_n = (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Έχουμε $a_n = \begin{cases} -1-\frac{1}{n}, & n=2k \\ 1+\frac{1}{n}, & n=2k-1 \end{cases}$ Δηλ. $a_{2k} = -1-\frac{1}{2k} \to -1$, $a_{2k-1} = 1+\frac{1}{2k-1} \to 1$

i.) Η (a_n) δεν συγκλίνει (έχει δυο διαφορετικά υπακολουθιακά όρια).

ii.) $K_n \geq \{-1, 1\}$

Θα εξηγήσουμε γιατί $\limsup a_n = 1$

Έστω $\varepsilon > 0$. Κοιτάζω τα $\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1+\varepsilon\}$ (βλέπουμε ότι είναι πεπερασμένο)

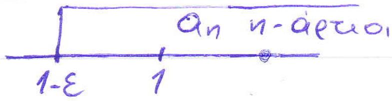
$\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1-\varepsilon\}$ (βλέπουμε ότι είναι άπειρο)

Πώς μπορώ να έχω $a_n > 1+\varepsilon$

- Ο n δεν μπορεί να είναι άρτιος: $a_{2k} = -1 - \frac{1}{2k} < -1 < 1+\varepsilon$.
- Αν ο n είναι περιττός, πρέπει $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1+\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon}$

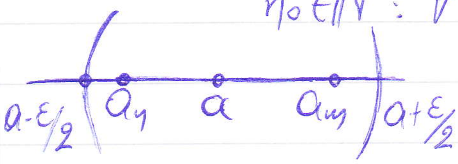
↳ πεπερ. το πλήθος φυσικοί ικανοποιούν αυτή την ανισότητα.



Για κάθε n περιττό,
$a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1 > 1-\varepsilon$.
Άρα υπάρχουν άπειροι το πλήθος $a_n > 1-\varepsilon$

Βασικές ακολουθίες (ή ακολουθίες Cauchy)

Παρατήρηση: Έστω ότι $a_n \to a$. Αν μου δώσουν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall s \geq n_0 \ \ |a_s - a| < \frac{\varepsilon}{2}$



Έστω $n, m \geq n_0$
Έχουμε $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας που έχουν μεγάλο δείκτη είναι κοντά στο όριο, άρα και μεταξύ τους κοντά."

Δηλ. έχουμε δείξει το εξής λήμμα:

ΛΗΜΜΑ: Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Ορισμός: (βασική ακολουθία): Μια ακολουθία (a_n) λέγεται βασική αν $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon}$

[Η απαίτηση στον ορισμό είναι ισχυρή: για παράδειγμα αν $n_0 = 70$ έχουμε $|a_{70} - a_{120}| < \varepsilon$, $|a_{71} - a_{72}| < \varepsilon$, $|a_{10^5} - a_{10^{10^6}}| < \varepsilon$]

⊛ $a_{n+1} - a_n \to 0$ δεν συνεπάγεται ότι η (a_n) είναι βασική.

Παράδειγμα: Ορίζουμε $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Είναι βασική; Ικανοποιεί την $a_{n+1} - a_n \to 0$;

(1) $a_{n+1} - a_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \dots + \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \dots - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(2) Ας πάρουμε $n \in \mathbb{N}$ (οποιοδήποτε) Τότε, για $m = 2n$ έχουμε

$$a_{2n} - a_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \dots + \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$- \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \dots - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Δηλ. $a_{2n} - a_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$

Η (a_n) δεν είναι βασική: αν ήταν, για $\varepsilon = 1$ θα υπήρχε n_0:

$\forall\, n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1.$

Τότε $\forall\, n \geq n_0$, παίρνοντας $m = 2n$, θα είχαμε

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \leq a_{2n} - a_n < 1$$

Δηλ. $\forall\, n \geq n_0$ θα είχαμε $n < 2$. Άτοπο.

21/3/2012 5η μάθημα

Βασικές ακολουθίες.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Η (a_n) λέγεται <u>βασική</u> (η <u>ακολουθία Cauchy</u>) αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε ζευγάρι φυσικών $n,m\geq n_0$ ισχύει $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

"όροι της (a_n) που έχουν αρκετά μεγάλο δείκτη είναι πολύ κοντά".

<u>Παράδειγμα</u>: Αν διαδοχικοί όροι είναι κοντά καθώς το $n\to\infty$ δηλ. αν $a_{n+1}-a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Αυτό δεν εξασφαλίζει πάντα ότι η (a_n) είναι βασική

πχ. $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots\frac{1}{\sqrt{2n}}\geq\sqrt{\frac{n}{2}} \to \text{μεγάλο.}$$

<u>Πρόταση</u>: Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη

<u>Αποδ.</u>

<u>Παίρνουμε</u> $\underline{\varepsilon=1}$: Αφού η (a_n) είναι βασική:

υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall\ n,m\geq n_0$: $|a_n-a_m|<1$

Ειδικότερα, παίρνοντας $m=n_0$ έχουμε:

για κάθε $n\geq n_0$ $|a_n-a_{n_0}|<1 \Rightarrow |a_n|\leq|a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}|$

$\Rightarrow \forall\ n\geq n_0$ $|a_n|<1+|a_{n_0}|$

Ορίζουμε $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots|a_{n_0-1}|,1+|a_{n_0}|\}$

Τότε $|a_n|\leq M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$

Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη.

Πρόταση 2: Έστω (a_n) βασική ακολουθία. Υποθέτουμε ότι έχει υπακολουθία (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$. Τότε, $a_n \to a$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$

(i) Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall\ n,m \geq n_1$ $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (βασική)

(ii) Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall\ n \geq n_2$ $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(a_{k_n} \to a)$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Έστω $n \geq n_0$. Τότε (i) $n \geq n_0 \geq n_1$ και $m = k_n \geq n \geq n_1$

$\Rightarrow |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon/2$

(ii) $n \geq n_0 \geq n_2 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$

Τότε $|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει και αντίστροφα κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική.

Απόδ.

Έστω (a_n) βασική. Από την Πρόταση 1 είναι φραγμένη.
Από το Θ. Bolzano-Weierstrass, αφού είναι φραγμένη έχει υπακολουθία $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$.
Από την Πρόταση 2, $a_n \to a$ (είναι βασική κ' έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

Το αντίστροφο: υποθέτουμε ότι $a_n \to a$
Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε n_0: $\forall\ s \geq n_0$ $|a_s - a| < \varepsilon/2$ ⊛
Τότε, αν $n,m \geq n_0$ τότε $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \underset{n,m \geq n_0}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Σχόλιο: Βασικό πρόβλημα: μας δίνουν μια ακολουθία (a_n) και μας ρωτάνε αν συγκλίνει. Ποιους τρόπους έχουμε για να απαντήσουμε;

1. Με τον ορισμό αν για κάποιο λόγο έχουμε μαντέψει το υποψήφιο όριο a.
2. Δείχνουμε ότι η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη.
3. Δείχνουμε ότι η (a_n) είναι βασική.

Ερωτήσεις Κατανόησης   Σωστό ή Λάθος

5) Αν η (a_n) είναι φραγμένη, $a \in \mathbb{R}$ και $a_n \not\to a$ τότε υπάρχουν $b \neq a$ και $a_{k_n} \to b$.

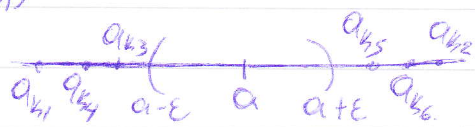
Σωστό

Ασκ.15

$a_n \not\to a \Rightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ άπειροι a_n είναι έξω από το $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\Rightarrow$ υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $\forall n \ |a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$



Η (a_n) είναι φραγμένη, άρα έχει (περαιτέρω) υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ ώστε $a_{k_{\lambda_n}} \to b$ (Bolzano-Weierstrass).

Όμως $|a_{k_{\lambda_n}} - a| \geq \varepsilon$

$\downarrow$

$|b - a| \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow b \neq a$.

10) Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει (a_{k_n}) ώστε $n^2 a_{k_n} \to 0$.

Σωστό.

παράδειγμα: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

παίρνω $k_n = n^3 \uparrow \rightsquigarrow a_{k_n} = \frac{1}{k_n} = \frac{1}{n^3}$

υπακολουθία

Άρα, $n^2 a_{n^3} = n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$ ✓

Για την απόδειξη, θα ορίσουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$ έτσι ώστε $|n^2 a_{k_n}| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \boxed{|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3}}$

Τότε, η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) και

$0 \leq |n^2 a_{k_n}| < \frac{1}{n} \to 0$

άρα $n^2 a_{k_n} \to 0$.

Βήμα 1: Ζητάμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_1}| < 1$

(αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = 1$ βρίσκουμε $m_0 \in \mathbb{N}: \forall\, m \geq m_0$ $|a_n| < 1$. Παίρνουμε πχ. $k_1 = m_0$).

Βήμα 2 Ζητάμε $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\boxed{k_2 > k_1}$ και $\boxed{|a_{k_2}| < \frac{1}{2^3}}$

(αφού $a_n \to 0$, από τον ορισμό με $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ξέρουμε ότι όλοι τελικά οι a_m ικανοποιούν την $|a_m| < \frac{1}{2^3}$, άρα υπάρχει $k_2 > k_1$ που την ικανοποιεί: $|a_{k_2}| < \frac{1}{2^3}$)

Επαγωγικά, αν έχουμε βρει $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ και
$|a_{k_1}| < 1$, $|a_{k_2}| < \frac{1}{2^3}$, ..., $|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3}$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό "$a_n \to 0$" με $\varepsilon = \frac{1}{(n+1)^3}$ και βλέπουμε ότι όλοι τελικά οι a_m ικανοποιούν την $|a_m| < \frac{1}{(n+1)^3}$, άρα και κάποιος $m = k_n + 1 > k_n$

Άσκηση 23

Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική και συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n} - a_n = \cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{n}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ όροι}} = \cancel{n} \cdot \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

Έχουμε $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι βασική: παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$.

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n, m \geq n_0$ $|a_n - a_m| < \frac{1}{4}$ (*)

Παίρνουμε κάποιο $n \geq n_0$ και $m = 2n > n \geq n_0$

Από την ⊛ έχουμε

$\frac{1}{2} \le a_{2n} - a_n = |a_{2n} - a_n| < \frac{1}{4}$

Άρα $\frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 4 < 2$ Άτοπο.

Αφού η (a_n) δεν είναι βασική η (a_n) δεν συγκλίνει. Είναι όμως αύξουσα ⇒ δεν είναι άνω φραγμένη. Είναι και αύξουσα άρα $a_n \to +\infty$

Άσκηση 24

Έστω $0<k<1$ και έστω ακολουθία (a_n) με την ιδιότητα

⊛ $|a_{n+1} - a_n| \le k|a_n - a_{n-1}|$ για κάθε $n \ge 2$.

Δείξτε ότι είναι βασική, άρα συγκλίνει.

$|a_3 - a_2| \le k|a_2 - a_1|$

$|a_4 - a_3| \le k|a_3 - a_2| \le k^2|a_2 - a_1|$

$|a_5 - a_4| \le k|a_4 - a_3| \le k^3|a_2 - a_1|$

$|a_6 - a_5| \le k|a_5 - a_4| \le k^4|a_2 - a_1|$

Επαγωγικά έχουμε

$\forall\, n \ge 2 \ \ |a_{n+1} - a_n| \le k^{n-1}|a_2 - a_1|$

$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \ldots \quad m-1 \quad m$

Έστω τώρα $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$.

Τότε, $|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)|$

$\le |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$

$\le k^{m-2}|a_2 - a_1| + k^{m-3}|a_2 - a_1| + \ldots + k^{n-1}|a_2 - a_1|$

$= |a_2 - a_1|\, k^{n-1}(k^{m-n-1} + k^{m-n-2} + \ldots + k + 1)$

$= |a_2 - a_1|\, k^{n-1} \frac{1-k^{m-n}}{1-k}$

$< |a_2 - a_1|\, k^{n-1} \frac{1}{1-k} = \left(\frac{1}{k(1-k)}|a_2 - a_1|\right) k^n$

$1 + x + x^2 + \ldots + x^s = \frac{1-x^{s+1}}{1-x}$

Έστω $\varepsilon > 0$

Αφού $k^n \to 0$ (διότι $0<k<1$)

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge n_0 \ \ \left(\frac{1}{k(1-k)}|a_2 - a_1|\right) k^n < \varepsilon$.

Τότε, αν $m, n \ge n_0$ και μπορώ να υποθέσω ότι $m > n$,

έχουμε $|a_m - a_n| \le \left(\frac{1}{k(1-k)}|a_2 - a_1|\right) k^n < \varepsilon$.

Δηλ η (a_n) είναι βασική

Άσκηση 25

Ορίζουμε $a_1=a$, $a_2=b$ και $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$, $n\geq 2$.
Εξετάστε αν συγκλίνει.

$a_3=\frac{a_2+a_1}{2}=\frac{a+b}{2}$

$a_4=\frac{a_3+a_2}{2}=\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}=\frac{a+3b}{4}$

$\vdots$

Θα εξετάσουμε αν είναι βασική

$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}-a_n=\frac{a_{n-1}-a_n}{2}$

Δηλ. $|a_{n+1}-a_n|=\frac{1}{2}|a_n-a_{n+1}|\leq\frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}|$

Η (a_n) ικανοποιεί την υπόθεση της Άσκησης 24 για $k=\frac{1}{2}$

άρα είναι βασική, άρα συγκλίνει.