12/3/2012 $\qquad$ 1ο μάθημα

Ενδιάμεση εξέταση (προαιρετική, 30%).

$$\text{βαθμός} = \max\left\{ \frac{30E+70T}{100}, T \right\}$$

<u>Ύλη</u>

1. Υπακολουθίες - βασικές ακολουθίες
2. Σειρές
3. Ομοιόμορφη συνέχεια
4. Ολοκλήρωμα Riemann
   (Ορισμός - Ιδιότητες - Θεμ. Θεώρ. του Απ. Λογισμού - - Τεχνικές Ολοκλήρωσης)
5. Θεώρημα Taylor - Δυναμοσειρές
6. Κυρτές συναρτήσεις

## Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

• **Ακολουθία**: είναι μια συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (Συμφωνούμε ότι $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$)

$a_1 = a(1)$

$a_2 = a(2)$

$\vdots \qquad \vdots$

$a_n = a(n)$ — ο $n$-οστός όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [redacted] $(a_n)$.

<u>Σύνολο όρων της ακολουθίας $(a_n)$</u>

$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

1) Λέμε ότι η $(a_n)$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ αν:

"για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει $|a_n-a|<\varepsilon$"

- $a_n \to +\infty$ αν για κάθε $M>0$ υπάρχει $n_0=n_0(M)\in\mathbb{N}$: $\forall\, n\geq n_0 \quad a_n>M$.
- $a_n \to -\infty$ αν για κάθε $M>0$ υπάρχει $n_0=n_0(M)\in\mathbb{N}$: $\forall\, n\geq n_0 \quad a_n<M$

2) Μοναδικότητα - αλγεβρικές ιδιότητες (πχ. $\left.\begin{matrix} a_n\to a \\ b_n\to b\end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n+b_n\to a+b$)

Κριτήρια για να βρίσκουμε το όριο

Αναδρομικές ακολουθίες.

3) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει.

<u>Αποδ</u>

Ας υποθέσουμε ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα ($a_1\leq a_2\leq a_3\leq \dots$) και άνω φραγμένη.

Ορίζουμε $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ το σύνολο των όρων. | $A\neq\emptyset$, $A$ άνω φραγμ.

Άρα, υπάρχει $a=\sup(A)$ από αξίωμα της πληρότητας

Έστω $\varepsilon>0$.

Ο $a-\varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A$, άρα υπάρχει $n_0$: $a-\varepsilon<a_{n_0}\leq a$.

Αφού η $(a_n)$ είναι αύξουσα, για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε

$$a-\varepsilon < \underbrace{a_{n_0} \leq a_n}_{(a_n)\uparrow} \underbrace{\leq a}_{a=\sup A} < a+\varepsilon$$

Δηλ. $\forall\, n\geq n_0 : |a_n-a|<\varepsilon$.

**Ορισμός:** (υπακολουθία)

Έστω $(a_n)$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$

Αν $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (δηλ. $k_1<k_2<k_3<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$) τότε η ακολουθία $(b_n)$ με $b_n=a_{k_n}$ λέγεται υπακολουθία της $(a_n)$.

## Παραδείγματα

① $k_n=2n \rightsquigarrow a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$ Η $(a_{2n})$ είναι η υπακολουθία των άρτιων όρων της $(a_n)$

② $k_n=2n-1 \rightsquigarrow a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ Η $(a_{2n-1})$ είναι η υπακολουθία των περιττών όρων της $(a_n)$

③ $k_n=n^2 \rightsquigarrow a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, a_{36}, \dots$

④ $k_n=2^n \rightsquigarrow a_2, a_4, a_8, a_{16}, a_{32}, a_{64}, \dots$

**ΛΗΜΜΑ**

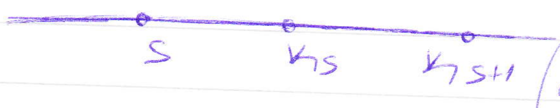
Έστω $(k_n)$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

Τότε, $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή

- Προφανώς $k_1 \geq 1$ γιατί $k_1 \in \mathbb{N}$ και ο 1 είναι ο μικρότερος φυσικός
- Αν υποθέσουμε ότι $k_s \geq s$ τότε $\left.\begin{array}{l} k_{s+1}>k_s \\ \text{και } k_s \geq s \end{array}\right\} \Rightarrow k_{s+1}>s$

$\Rightarrow k_{s+1} \geq s+1$ γιατί ανάμεσα στον $s$ και στον $s+1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός.




(δεν μπορώ να έχω $s<k_{s+1}<s+1$) $\Rightarrow$

**Πρόταση 1**: Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ και αν $(a_{k_n})$ είναι οποιαδήποτε υπακολουθία της $(a_n)$ τότε $a_{k_n} \to a$.

**Απόδ.**

Έστω $(a_{k_n})$ υπακολουθία της $(a_n)$. Θα δείξουμε ότι $a_{k_n} \to a$

Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ ⊛

ο $n$-οστός όρος

Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε
$\forall m \geq n_0 : |a_m - a| < \varepsilon$ ⊛⊛

Θεωρούμε αυτό το $n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε
$k_n \geq n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq n_0$.
και βάζοντας $m = k_n$ στην ⊛⊛ παίρνουμε
$|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ δηλ. την ⊛.

**Εφαρμογή**

Η $(a_n) = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.
$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$.

$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$.

**Παρατήρηση:**

Έστω $(a_n)$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αν έχουμε δυο υπακολουθίες $(a_{k_n})$ και $(a_{\lambda_n})$ της $(a_n)$ και $a_{k_n} \to x$, $a_{\lambda_n} \to y$, $x \neq y$

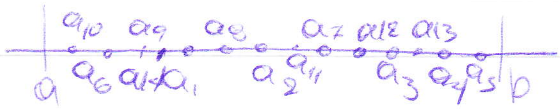
Τότε, η $(a_n)$ δεν συγκλίνει. Γιατί, αν είχαμε $a_n \to a \in \mathbb{R}$ από την πρόταση 1 θα είχαμε $a_{k_n} \to a$ κ' $a_{\lambda_n} \to a$
και $a_{k_n} \to x$ κ' $a_{\lambda_n} \to y$

$\Downarrow$ $a = x$ $\quad$ $\Downarrow$ $a = y$

Τότε $x = y = a$
Άτοπο.

# <u>Το Θεώρημα BOLZANO-WEIERSTRASS</u>

Τι είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών:
Υπάρχουν $a<b$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ $a\le a_n\le b$.
(η ακολουθία έχει όλους τους όρους της μέσα σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ )




Οι όροι αυτούς είναι στο $[a,b]$
- Εύκολα βρίσκουμε παραδείγματα φραγμένων ακολουθιών οι οποίες δεν συγκλίνουν.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: (Bolzano-Weierstrass).
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

<u>Ιδέα της απόδειξης.</u>
Δείχνουμε πρώτα ότι:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u>: Κάθε ακολουθία $(a_n)$ έχει μονότονη υπακολουθία. $(a_{k_n})$ (είτε αύξουσα είτε φθίνουσα).

Αν επιπλέον η $(a_n)$ είναι φραγμένη, τότε η $(a_{k_n})$ του Θεωρ. 2 είναι μονότονη και φραγμένη, άρα <u>συγκλίνει</u>. (από ΑπΙ).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(a_n)$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$
Ο $a_m$ λέγεται <u>σημείο κορυφής</u> της $(a_n)$ αν:
$\boxed{\forall k\ge m \text{ ισχύει } a_m\ge a_k}$

## Απόδ (του Θεωρ. 2)

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Η $(a_n)$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής

Τότε υπάρχουν $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε κάθε $a_{k_n}$ να είναι σημείο κορυφής της $(a_n)$

Τότε, η υπακολουθία $(a_{k_n})$ είναι φθίνουσα

"$k_n < k_{n+1}$ κ̓ ο $a_{k_n}$ είναι σημείο κορυφής της $(a_n)$

$\underset{\text{ορ. του σ. κορ.}}{\Longrightarrow}$ $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$".


β) Η $(a_n)$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής.

Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq N$ τότε ο $a_m$ δεν είναι σημείο κορυφής της $(a_n)$.

Παίρνω $k_1 = N$

Ο $a_{k_1}$ δεν είναι σημείο κορυφής

$\Rightarrow \exists\, k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$

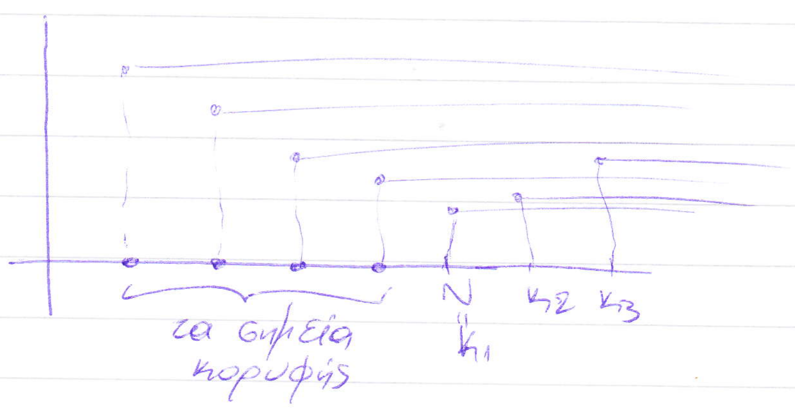
Ο $a_{k_2}$ δεν είναι σημείο κορυφής $(k_2 > N)$.

$\Rightarrow \exists\, k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$

⋮

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$

Τότε, η $(a_{k_n})$ είναι γνησίως αύξουσα.



Εφαρμογή. (ένα κλασικό θεώρ. για συνεχείς συναρτήσεις)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η $f$ είναι φραγμένη.

Αποδ. Έστω ότι η $f$ δεν είναι φραγμένη.
Τότε $\exists\ x_1 \in [a,b] : |f(x_1)| > 1$
$\exists\ x_2 \in [a,b] : |f(x_2)| > 2$
$\vdots$
$\exists\ x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$
$\vdots$

Η $(x_n)$ είναι στο $[a,b]$
Από το Θ. Bolzano-Weierstrass έχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ η οποία συγκλίνει
$x_{k_n} \to x$.
(επίσης $a \leq x_{k_n} \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$)

Από την αρχή της μεταφοράς $f(x_{k_n}) \to f(x)$

$$\Downarrow$$

$$|f(x_{k_n})| \to |f(x)|$$

Όμως $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$

$\Rightarrow |f(x_{k_n})| \to +\infty$.

Άτοπο.

14/3/2012 μάθημα 2ο

Υπακολουθία της $(a_n)$ είναι κάθε ακολουθία της μορφής $(a_{k_n})$ όπου $(k_n)$ γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών ($k_1<k_2<\ldots<k_n<k_{n+1}<\ldots$)

Πρόταση: Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ ισχύει $(a_{k_n}) \to a$.

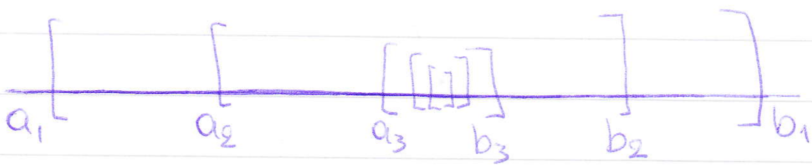
ΘΕΩΡΗΜΑ (BOLZANO WEIERSTRASS):
Κάθε φραγμένη ακολουθία $(a_n)$ έχει τουλ. μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ιδέα απόδειξης: αρχικά αποδεικνύουμε ότι:
Πρόταση: Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.
Μετά από αυτό, λέμε το εξής:
- Η $(a_n)$ είναι φραγμένη: υπάρχουν $a<b$ στο $\mathbb{R}$ ώστε: $\forall n \in \mathbb{N}$ $a \le a_n \le b$.
- Από την Πρόταση, η $(a_n)$ έχει μονότονη υπακολουθία $(a_{k_n})$

Τότε $\left\{\begin{array}{l}(a_{k_n}) \text{ μονότονη} \\ a \le a_{k_n} \le b \text{ για κάθε } n\end{array}\right. \xRightarrow{\text{ΑπΙ}}$ η $(a_{k_n})$ συγκλίνει.

Δεύτερη απόδειξη (με την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων)

Θεώρημα (Απ. Ι): Έστω $\left([a_n,b_n]\right)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων:
$[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq [a_{n+1},b_{n+1}] \supseteq \ldots$

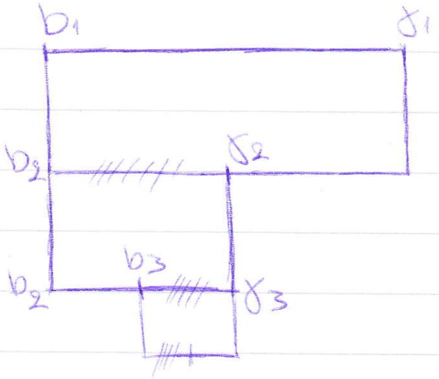



Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \neq \emptyset$

και μάλιστα, αν $b_n - a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{y\}$ είναι μονοσύνολο

## Αποδ. του Θ. Β-W

Έστω $(a_n)$ φραγμένη ακολουθία. Τότε, υπάρχουν $b_1 < \gamma_1$ ώστε $\forall n \quad b_1 \le a_n \le \gamma_1$

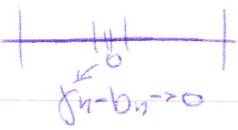



Στο $[b_1, \gamma_1]$ έχω όλους τους όρους της $(a_n)$, οι οποίοι είναι άπειροι
Χωρίζω το $[b_1, \gamma_1]$ σε δυο ίσα διαδοχικά ευθ. τμήματα.
Αφού η $(a_n)$ έχει άπειρους όρους, σε κάποιο από τα δυο υποδιαστήματα έχουμε άπειρους όρους της $(a_n)$.
Αυτό το λέω $[b_2, \gamma_2]$
- $[b_2, \gamma_2] \subseteq [b_1, \gamma_1]$
- $\gamma_2 - b_2 = \frac{\gamma_1 - b_1}{2}$
- άπειροι όροι μέσα.

Επαγωγικά, ορίζουμε κλειστά διαστήματα $[b_n, \gamma_n]$ ώστε:

$$\begin{cases} (a) & [b_1,\gamma_1] \supseteq [b_2,\gamma_2] \supseteq [b_3,\gamma_3] \supseteq \dots \supseteq [b_n,\gamma_n] \supseteq [b_{n+1},\gamma_{n+1}] \supseteq \dots \\ (b) & \gamma_n - b_n = \frac{\gamma_1 - b_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

(γ) άπειροι όροι της $(a_n)$ ανήκουν στο $[b_n, \gamma_n]$




Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [b_n, \gamma_n] = \{y\}$$

Θα ορίσουμε υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ προσέχοντας το εξής:
"για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b_n \le a_{k_n} \le \gamma_n$". Άρα, $a_{k_n} \to y$.

$$\underset{y}{\underset{\downarrow}{b_n}} \le a_{k_n} \le \underset{y}{\underset{\downarrow}{\gamma_n}}$$

### Πώς ορίζεται η $(a_{k_n})$;

- Στο $[b_1, \gamma_1]$ έχω άπειρους όρους της $(a_n)$. Παίρνω κάποιον (πχ τον $a_1$). Αυτός είναι ο $a_{k_1}$
- Στο $[b_2, \gamma_2]$ έχω άπειρους όρους της $(a_n)$, άρα κάποιον $a_{k_2}$ με $k_2 > k_1$ (αλλιώς στο $[b_2, \gamma_2]$ θα μπορούσα να έχω μόνο

κάποιους από τους $a_1, a_2, \dots, a_{k_1}$ που είναι πεπερασμένοι το πλήθος).

• Στο $[b_3, \gamma_3]$ έχω άπειρους όρους της $(a_n)$ άρα και κάποιον $a_{k_3}$ με $k_3 > k_2$

⋮

Επαγωγικά βρίσκω $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ με $a_{k_n} \in [b_n, \gamma_n]$.

## Ασκήσεις

11.) Έστω $(a_n)$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αν $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to a$ τότε $a_n \to a$.

Αποδ. Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

• Αφού $a_{2n} \to a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N} : |a_{2m} - a| < \varepsilon \ \forall m \geq n_1$ (*)

• Αφού $a_{2n-1} \to a$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_2$ $|a_{2m-1} - a| < \varepsilon$ (**)

| $n_1 = 7$ | $n_2 = 4$ |
|---|---|
| $a_{14}$ | $a_7$ |
| $a_{16}$ | $a_9$, $a_{11}$ |
| $a_{18}$ | $a_{13}$ |
| $a_{20}$ | $a_{15}$ |
| $a_{22}$ | $a_{17}$ |

Ορίζω $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$

Έστω $n \geq n_0$

• Αν $n = 2m$ (άρτιος) τότε $n = 2m \geq n_0 \geq 2n_1 \Rightarrow m \geq n_1$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} |a_n - a| = |a_{2m} - a| < \varepsilon$

• Αν $n = 2m - 1$ (περιττός) τότε $n = 2m - 1 \geq n_0 \geq 2n_2 - 1 \Rightarrow m \geq n_2$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} |a_{2m-1} - a| < \varepsilon$ δηλ. $|a_n - a| < \varepsilon$.

12| Έστω $(a_n)$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

$a_{2k} \to a$
$a_{2k-1} \to b$
$a_{3k} \to \gamma$

Δείξτε ότι $a=b=\gamma$ κ' ότι η $(a_n)$ συγκλίνει.

$a_2\ a_4\ a_6\ a_8\ a_{10}\ a_{12}\ a_{14}\ a_{16}\ a_{18} \dots$
$a_1\ a_3\ a_5\ a_7\ a_9\ a_{11}\ a_{13}\ a_{15}\ a_{17} \dots$
$a_3\ a_6\ a_9\ a_{12}\ a_{15}\ a_{18}\ a_{21}\ a_{24}\ a_{27} \dots$

① Παρατηρούμε ότι οι υπακολουθίες $(a_{2k})$ και $(a_{3k})$ έχουν άπειρους κοινούς όρους, τους $a_{6k}$.
Με άλλα λόγια η $(a_{6k})$ είναι κοινή υπακολουθία των $(a_{2k})$ και $(a_{3k})$
Αφού $a_{2k} \to a$ έχουμε $a_{6k} \to a$ (ως υπακολουθία της $(a_{2k})$)
Αφού $a_{3k} \to \gamma$ έχουμε $a_{6k} \to \gamma$ (—— ΙΙ —— $(a_{3k})$)
Από την μοναδικότητα του ορίου, $\boxed{a=\gamma}$

Όμοια, η $(a_{6k-3})$ είναι κοινή υπακολουθία των $(a_{2k-1})$ και $(a_{3k})$
Αφού $a_{2k-1} \to b \Rightarrow a_{6k-3} \to b$
$a_{3k} \to \gamma \Rightarrow a_{6k-3} \to \gamma$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{b=\gamma}$

Τότε, $\boxed{a=b=\gamma}$

Αφού $a_{2k} \to a$
$a_{2k-1} \to b = a$ $\Big\} \xrightarrow{Ασκ. 11} a_n \to a.$

<u>Σωστό ή Λάθος</u>

1.| $a_n \to +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε $M>0$ υπάρχουν άπειροι όροι της $(a_n)$ που είναι μεγαλύτεροι από τον $M$.
(Δεν ισχύει η $\Leftarrow$)
Ορίζουμε $a_n = \begin{cases} n, & n=2k \ (k\in\mathbb{N}) \\ 1, & n=2k-1 \ (k\in\mathbb{N}) \end{cases}$

α) Έστω $M>0$. Βρίσκουμε $k_0 \in \mathbb{N} : 2k_1 > M$ (το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο).

Τότε, για κάθε $s \geq k_1$ έχουμε $2s \geq 2k_1 > M$.

Δηλ. οι $a_{2k_1}, a_{2k_1+2}, a_{2k_1+4}, \dots$ είναι $>M$.

β) $a_n \not\to +\infty$. Παίρνω $M=2$. Τότε, όλοι οι όροι $a_{2k-1}=1<M$.
Συνεπώς, δεν ισχύει ότι όλοι τελικά οι $a_n$ είναι $>M$.

$\Rightarrow a_n \not\to +\infty$.

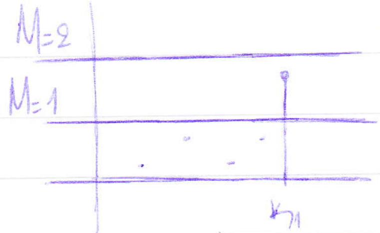
2) Η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists$ υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ με $a_{k_n} \to +\infty$.

($\Leftarrow$) Σωστό. Έστω ότι υπάρχει $M>0 : \forall m : a_m \leq M$.
Όμως τότε $a_{k_n} \leq M$ για κάθε $n$.

$\downarrow$

$+\infty$ Άτοπο: τελικά θα είχαμε $a_{k_n} > M$.

($\Rightarrow$) Σωστό | Παίρνω $M=1$. Η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη από τον 1, άρα $\exists k_1 \in \mathbb{N} : a_{k_1} > 1$.




Παίρνω $M=2$

Ο $M=2$ δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)$

$\Rightarrow \exists k_2 : a_{k_2} > M=2$

(δεν μπορώ όμως να εξασφαλίσω πρέπει ότι $k_2 > k_1$)

Παίρνω $M=\max\{2, a_1, \dots, a_{k_1}\}$

Ο $M$ δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)$

$\Rightarrow \exists k_2 : a_{k_2} > M$.

Τότε (i) $a_{k_2} > 2$ διότι $M \geq 2$

(ii) ο $k_2$ δεν είναι κάποιος από τους $1, 2, \dots, k_1$
γιατί $a_{k_2} > a_1, a_{k_2} > a_2, \dots, a_{k_2} > a_{k_1}$

$\Rightarrow k_2 > k_1$

Στο τρίτο βήμα, ορίζω: $M = \max\{3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k_1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2}\}$
Η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists k_3$ ώστε $a_{k_3} > M$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{k_3} > 3 \\ \text{και } a_{k_3} > a_1 \\ \quad a_{k_3} > a_2 \\ \quad \vdots \\ a_{k_3} > a_{k_2} \end{array}\right\} \Rightarrow k_3 > k_2$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
ώστε $a_{k_n} > n \Rightarrow a_{k_n} \to +\infty$

16/3/2012 3º μάθημα

Ερωτήσεις Κατανόησης (συνέχεια).

3.) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.
Σωστό: έχουμε δείξει ότι αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ ισχύει $a_{k_n} \to a$

4.) Αν η $(a_n)$ δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία
Σωστό: Στην απόδειξη του B-W είδαμε ότι: αν η $(a_n)$ δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής και τότε είδαμε ότι μπορούμε να ορίσουμε γνησίως αύξουσα υπακολουθία της.

6.) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία
Λάθος
Από το Θ. B-W αν η $(a_n)$ είναι φραγμένη τότε έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία