$$\bullet \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan x)'\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \tan x\,\frac{\sin x}{\cancel{\cos^4 x}\ \cos^3 x}\,dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\overset{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int\frac{dx}{\cos^4 x} + 2\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 3\int\frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\tan x}{3\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{3} + c$$

$\boxed{3|6}$

Ειδικές αντικαταστάσεις

1) $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

R = ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών: $R(t,s) = \frac{P(t,s)}{Q(t,s)}$
και $R(\cos x, \sin x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει αν θέσουμε $t=\cos x$ και $s=\sin x$
πχ:

$$R(t,s) = \frac{t^3 s - 2ts^2 + s^3}{s^2 t - st^5}$$

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{\cos^3 x\cdot\sin x - 2\cos x\,\sin^2 x + \sin^3 x}{\sin^2 x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos^5 x}$$

Παραδείγματα:

α) $$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2y}{1+y^2}}{1-\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int \frac{(1+y)^2}{y^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

, υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma y+\delta}{1+y^2}$$

2. $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$ (2α)

$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$ (2β)

$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$ (2γ)

(2α) $x = \sin y$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$

$dx = \cos y\,dy$

Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R(\sin y, \cos y)\cos y\,dy$$

ολοκλήρωμα του τύπου 1 και υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \tan\frac{y}{2}$

(2β) θα μπορούσα να θέσω $x = \frac{1}{\cos y} \to \sqrt{x^2-1} =$

$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \tan y$

το (2β) γίνεται:

$$\int R(\cos y, \sin y)\,dy \xrightarrow{u=\tan\frac{y}{2}} \text{ρητό.}$$

Μπορούμε όμως να αναχθούμε σε ρητό ολοκλήρωμα με μια μόνο αντικατάσταση.

$y - x = \sqrt{x^2-1}$ δηλαδή $y = x + \sqrt{x^2-1}$

Πρέπει να εκφράσουμε τα $x, \sqrt{x^2-1}, dx$ σαν "ρητές συναρτήσεις του y".

- $y - x = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2y}$
- $\sqrt{x^2-1} = y - x = y - \frac{y^2+1}{2y} = \frac{y^2-1}{2y}$
- $dx = \frac{2y\cdot 2y - 2(y^2+1)}{4y^2}dy = \frac{y^2-1}{2y^2}\,dy$

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται $\int R\left(\frac{y^2+1}{2y}, \frac{y^2-1}{2y}\right)\frac{y^2-1}{2y^2}dy$

ρητό ολ/μα υπολογίζεται.

(11) a) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx =$

$y = \cos x$
$dy = -\sin x \, dx$

$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|y-1|}{|y+1|} + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c$$

Άλλος τρόπος

$y = \tan\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Σημείωση

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)^2\right) + c$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

β) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2y} + c$

$y = x^2+1$
$dy = 2x\,dx$
$x\,dx = \frac{1}{2}\,dy$

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + c$

$= \sqrt{x^2+1} + c$

γ) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{x=\sin y}{=\!=} \int \frac{1}{\cancel{\cos y}\cdot \sin y}\,\cancel{\cos y}\,dy$

↳ το έχουμε υπολογίσει.

δ) $\displaystyle\int x\cdot \arctan x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x\,dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\cdot \arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$

και $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= x - \arctan x.$

Παράδειγμα:

α) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx \xrightarrow{y=x+\sqrt{x^2-1}} \int \frac{y^2-1}{2y} \cdot \frac{y^2-1}{2y^2}\,dy$

$= \frac{1}{4}\int \frac{y^4-2y^2+1}{y^3}\,dy = \frac{1}{4}\left(\int y\,dy - 2\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{y^3}dy\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2} - 2\ln|y| - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right) + c$

όπου y θέτω $x+\sqrt{x^2-1}$

(2ο) $R(x, \sqrt{x^2+1})$
$y = x+\sqrt{x^2+1}$
⋮

β) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$y-x = \sqrt{x^2+1}$
$y^2-2xy+x^2 = x^2+1$
$\Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y}$

$\sqrt{x^2+1} = y-x = y-\frac{y^2-1}{2y}$
$= \frac{y^2+1}{2y}$

$dx = \frac{\cancel{2}y\,2y-\cancel{2}(y^2-1)}{\cancel{2}\cdot 2y^2}\,dy = \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$

Άρα

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{y^2-1}{2y}\cdot\frac{y^2+1}{2y}}\cdot\frac{y^2+1}{2y^2}dy$$

$$= 2\int \frac{dy}{y^2-1} = \int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy$$

$$= \ln|y-1| - \ln|y+1| + c = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right| + c$$

<u>Ασκήσεις</u>

8) α) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, β) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

α)

$y = e^x$

$dy = e^x dx = y\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$

Έχουμε το:

$$\int \frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{1}{y}dy = \arctan y + c$$

$$= \arctan(e^x) + c$$

β) $y = \tan x$

$dy = \frac{1}{\cos^2 x}dx$. Έχουμε το:

$$\int \ln y\,dy = \int (y)'\ln y\,dy =$$

$$= y\ln y - \int y(\ln y)'dy = y\ln y - y + c$$

$$= \tan x\cdot\ln(\tan x) - \tan x + c$$

13) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

*Μπορώ να βρω την
$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$
και μετά
$$I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$$

Θέτουμε $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$$

$$dx = -dy$$

Άρα,
$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos y + \sin y}{\cos y + \sin y} - \frac{\sin y}{\cos y + \sin y} \right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dy - I$$

άρα $I = \frac{\pi}{2} - I$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

17) Δείξτε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

Γενικά, για $t \geq 0$

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Με επαγωγή

$n=0$: Θέλουμε $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 0! = 1$

Υπολογίζουμε το

$$\int_0^M e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = 1 - e^{-M} \quad (M>0)$$

$$\lim_{M\to+\infty}(1-e^{-M}) = 1 - 0 = 1$$

Με βάση τον ορισμό

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx := \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\, dx = 1$$

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $\int_0^{\infty} x^k \cdot e^{-x}\, dx = k!$ $(k \geq 0)$

Για $M>0$ υπολογίζουμε το

$$\int_0^M x^{k+1} \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^M x^{k+1} (-e^{-x})'\, dx =$$

$$= \left[-x^{k+1} \cdot e^{-x}\right]_0^M + \int_0^M (x^{k+1})' \cdot e^{-x}\, dx = -M^{k+1} \cdot e^{-M} + (k+1) \int_0^M x^k e^{-x} dx$$

• $\lim_{M\to\infty} \frac{M^{k+1}}{e^{M}} = 0$ $\left(\frac{\text{πολυώνυμο}}{\text{εκθετική}}\right)$

• $(k+1)\int_0^M x^k e^{-x}\,dx \xrightarrow[\text{επ. υπόθ.}]{} (k+1)\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x}\,dx$

$= (k+1)\cdot k! = (k+1)!$

Άρα $\int_0^\infty x^{k+1}\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{k+1}\cdot e^{-x}\,dx = (k+1)!$

16) Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

• $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx = \text{"}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty\text{"} = \cancel{-\frac{1}{2}e^{-\infty^2}} + \frac{1}{2}e^{-0^2} = \frac{1}{2}$

• $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \ln x\,dx \overset{\lim_{\delta\to 0^+}}{=} [x\ln x - x]_\delta^1$

$= \lim_{\delta\to 0^+}[-1 - \underbrace{\delta\ln\delta}_{0} + \underbrace{\delta}_{0}] = -1$

• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 1^-}\int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \lim_{\delta\to 1^-}\left[\arcsin x\right]_0^\delta = \lim_{\delta\to 1^-}[\arcsin\delta - \arcsin 0]$

$= \frac{\pi}{2}$

$\left\{ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{x=\sin y}{=} \int \frac{1}{\cos y}\cos y\,dy = y = \arcsin x \right.$