2015

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, η f είναι $(n-1)$-φορές παρ/μη στο $[a,b]$ και υπάρχει η $f^{(n)}(x_0)$ για κάποιο $x_0\in(a,b)$

• Το n-οστό πολυώνυμο Taylor της f στο x_0:

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

• Το n-οστό υπόλοιπο: $R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$

Θεώρημα: Με αυτές τις υποθέσεις ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

Δηλαδή καθώς $x\to x_0$ έχουμε $|R_{n,f,x_0}(x)|=o(|x-x_0|^n)$

Επίσης, το $T_{n,f,x_0}(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\le n$ που έχει αυτή τη ιδιότητα.

Πρόβλημα: Να βρεθούν "βολικές εκφράσεις" για το υπόλοιπο $f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$

Θεώρημα 2: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0\in[a,b]$. Τότε $\forall\, x\in[a,b]$

α) υπάρχει ξ_x ανάμεσα στα x και x_0 ώστε

$$(\text{Cauchy}) \quad R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

β) υπάρχει ξ_x ανάμεσα στα x και x_0 ώστε

$$(\text{Lagrange}) \quad R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

γ) $$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

(ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου)

Απόδειξη: Το x_0 είναι σταθερό και μας έχουν δώσει και κάποιο $x\in[a,b]$ (σταθερό και αυτό στο εξής). Ορίζουμε $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$\varphi(t)=R_{n,f,t}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Παρατηρούμε ότι:

1) $$\varphi(x)=f(x)-\left(f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k\right)=0$$

2) $\varphi(x_0)=R_{n,f,x_0}(x)$ (το οποίο ψάχνουμε)

Δηλαδή

$$R_{n,f,x_0}(x)=\varphi(x_0)-\varphi(x).$$

Παραγωγίζουμε την φ: Έχουμε ~~φ(x)(t)~~

$$\varphi(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\Rightarrow \varphi'(t)=\left(-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)(x-t)^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}\right)\right)'$$

$$=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)+\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{f''(t)}{2}2(x-t)$$

$$-\dots-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{f^{(n)}(t)}{\cancel{n!}\,(n-1)!}\cancel{n}(x-t)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Ορίσαμε την φ και είδαμε ότι

$$R_{n,f,x_0}(x)=\varphi(x_0)-\varphi(x)$$

$$\left(\text{και επίσης } \varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)(*)$$

α) Από το κλασικό ΘΜΤ υπάρχει ξ_x ανάμεσα στα x και x_0:

$$R_{n,f,x_0}(x)=\varphi(x_0)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_x)(x_0-x)=$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}(x-\xi_x)^n(x-x_0)$$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Cauchy για την φ και την $g(t)=(x-t)^{n+1}$.

Υπάρχει ξ_x ανάμεσα στα x_0 και x:

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{g(x_0)-g(x)} = \frac{\varphi'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}\cancel{(x-\xi_x)^n}}{-(n+1)\cancel{(x-\xi_x)^n}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

γ) Χρησιμοποιούμε το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα:

Αφού η $f^{(n+1)}$ είναι ολ|μη, η φ' είναι ολ|μη από την $(*)$ άρα

$$R_{n,f,x_0}(x) = \varphi(x_0)-\varphi(x) = \int_x^{x_0} \varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

<u>Πρόταση 1</u>: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

(η εκθετική συνάρτηση αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{R}$)

<u>Απόδειξη</u>

Η $f(x)=e^x$ είναι άπειρες φορές παρ|μη

και $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall x\in\mathbb{R}$ $T_{n,f,0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $|R_{n,f,0}(x)| = |f(x)-T_{n,f,0}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 2, υπάρχει ξ_x ανάμεσα στο 0 και στο x τέτοιο ώστε

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

- Αν $x > 0$ τότε $0 < \xi_x < x \Rightarrow e^{\xi_x} \le e^x = e^{|x|}$
- Αν $x \le 0$ τότε $x < \xi_x < 0 \Rightarrow e^{\xi_x} \le e^0 = 1 \le e^{-x} = e^{|x|}$

Συνεπώς, $|R_{n,f,0}(x)| \le \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$

Δείχνουμε ότι η ~~a_n~~

$$a_n = \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \quad (\Rightarrow R_{n,f,0}(x) \to 0)$$

Έχουμε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0$

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το e^2 με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων

Ξέρουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left| e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \right| \le \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\le \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10^8}$$

Πρόταση 2: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Απόδειξη:

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad f(x) = \cos x$$

Θέλουμε $T_{2n}(x) \longrightarrow \cos x \Leftrightarrow R_{2n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Ξέρουμε ότι υπάρχει ξ_x ανάμεσα στο 0 και x:

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_x) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{(Lagrange)}$$

$f^{(2n+1)}$ είναι μια από τις $\pm\cos$, $\pm\sin$ και φράσσεται απολύτως από 1 παντού

$$\Rightarrow |R_{2n}(x)| = \frac{|f^{(2n+1)}(\xi_x)|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \leq \underbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{b_n}$$

Τέλος $b_n \to 0$ διότι

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0 < 1 \quad \text{(κριτήριο λόγου)}$$

Πρόταση 3: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Απόδειξη: $T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Όπου ~~ση~~ $\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = |R_{2n+1}(x)|$

$= \frac{\overbrace{|f^{(2n+2)}(\xi_x)|}^{\leq 1}}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \leq \underbrace{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}_{b_n}$

για κάποιο ξ_x ανάμεσα στα 0 και x.

Αφού $\frac{b_{n+1}}{b_n} =$

$= \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+4)} \to 0 < 1$

Άρα $R_{2n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Υπάρχει η $f'(0)$;;;;

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

Όταν $x \to 0^+$ θέτουμε $y = \frac{1}{x} \to +\infty$ και παίρνουμε το $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}}$ $\left| \frac{(y)'}{(e^{y^2})'} = \frac{1}{2y\, e^{y^2}} \to 0 \right.$

Το ίδιο όταν $x \to 0^-$

Για $x\neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$. Δηλαδή

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

και είναι συνεχής.

Υπάρχει η $f''(0)$;;;;

Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{y\to\pm\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} \overset{DLH}{=} 0$$

Για $x\neq 0$, $f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}$

Άρα

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι: $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \underbrace{P_k}_{\text{πολυώνυμο}}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0, \quad x=0\end{cases}$

Ειδικότερα (1) Η f είναι άπειρες φορές παρ/μη

(2) $\forall k\geq 0 \quad f^{(k)}(0)=0$

$T_0(x) = f(0) = 0$

$T_1(x) = f(0) + f'(0)x = 0$

$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0$

... $T_n(x)\equiv 0$ για κάθε n / $R_n(x) = f(x) \not\to 0$