Ε35: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, f' συνεχής, $0<f'(x)\leq 1$ στο $[0,1]$

Δείξτε ότι: $\int_0^1 (f(x))^3dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

Ορίζω $G(t)=\left(\int_0^t f(x)dx\right)^2-\int_0^t (f(x))^3dx$

για $t\in[0,1]$

Ζητάμε $G(1)\geq 0$

Έχουμε $G(0)=0$

Αν δείξουμε ότι $G'\geq 0 \Rightarrow G$ αύξουσα $\Rightarrow G(1)\geq G(0)=0$

$\boxed{18/5}$

Θεώρημα Taylor

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παρ/μη στο $x_0\in(a,b)$ υπάρχει η εφαπτομένη

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \text{ στο σημείο } (x_0,f(x_0))$$

Παρατήρηση Έχουμε

$$\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

Δηλαδή $\dfrac{|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} \longrightarrow 0$

(το "σφάλμα" είναι μικρό ακόμα και σε σύγκριση με το $|x-x_0|$ το οποίο $\to 0$ όταν $x \to x_0$)

Συμβολικά: $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(|x-x_0|)$ καθώς $x \to x_0$

Ας υποθέσουμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παράγωγη στο $[a,b]$ και υπάρχει η $f''(x_0)$ σε κάποιο $x_0\in(a,b)$. Θεωρούμε το τριώνυμο:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

$\longrightarrow 0$ όταν $x \to x_0$.

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή "$\frac{0}{0}$" όταν $x\to x_0$. (ο αριθμητής $\to 0$ γιατί $f(x)-f(x_0)\to 0$: η f είναι συνεχής στο x_0 γιατί $\exists f'(x_0)$)

Υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων:

$$\frac{f'(x_0)-0-f'(x_0)\cdot 1-f''(x_0)\frac{2(x-x_0)}{2}}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$$

$\xrightarrow{x\to x_0} 0$ (αντικαθιστούμε την f με την f' στον προηγούμενο υπολογισμό ή εφαρμόζουμε ΔΗ)

Δηλαδή $\left| f(x)-f(x_0)-f'(x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \right| = o\left(|x-x_0|^2\right)$ όταν $x \to x_0$

Ορισμός (πολυώνυμο Taylor)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $n\geq 1$ $\quad (f^{(0)}=f)$

Υποθέτουμε ότι η f είναι $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και αν υπάρχει η $f^{(n)}(x_0)$ για κάποιο $x_0\in[\alpha,\beta]$.

Το n-οστό πολυώνυμο Taylor της f στο x_0 είναι:

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor είναι το

$$R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$$

Παραδείγματα:

α) $f(x)=e^x$, $x_0=0$.

$f(x)$	$x_0=0$
$f(x)=e^x$	$f(0)=e^0=1$
$f'(x)=e^x$	$f'(0)=1$
$f''(x)=e^x$	$f''(0)=1$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x)=e^x$	$f^{(n)}(0)=1$

$$T_{n,f,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

(Όταν το $x_0=0$ τότε το υπόλοιπο λέγεται Maclauren) β) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$.

		$x_0 = 0$
f	$\cos x$	1
f'	$-\sin x$	0
f''	$-\cos x$	-1
f'''	$\sin x$	0
$f^{(4)}$	$\cos x$	1
$f^{(5)}$	$-\sin x$	0
$f^{(6)}$	$-\cos x$	-1
$f^{(7)}$	$\sin x$	0

$$T_{2n}(x) = 1 + 0x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \left(= T_{2n+1}(x) \right)$$

γ) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$\sin x$	0
$\cos x$	1
$-\sin x$	0
$-\cos x$	-1
$\sin x$	0
$\cos x$	1
$-\sin x$	0
$-\cos x$	-1

$T_1(x) = x$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\vdots$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \left(= T_{2n+2}(x) \right)$$

δ) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$.

$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{-(2(1+x^2)^2 - 2x\, 2(1+x^2)2x)}{(1+x^2)^4}$ $\quad f''(0) = -2$

<u>Θεώρημα 1</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$.
Αν η $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει, τότε:

$$\lim \frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

Δηλαδή

$$|R_{n,f,x_0}(x)|=|f(x)-T_{n,f,x_0}(x)|=o(|x-x_0|^n)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Έχουμε $T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$

$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Άρα $T'_{n,f,x_0}=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

Επίσης $T_{n-1,f',x_0}\underset{\text{ορ}}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$\underset{k=s-1}{=}\sum_{s=1}^{n}\frac{f^{(s)}(x_0)}{(s-1)!}(x-x_0)^{s-1}=T'_{n,f,x_0}(x)$$

Δηλαδή

$$T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0} \quad (*)$$

$$R'_{n,f,x_0} = R_{n-1,f',x_0}$$

και $R'_{n,f,x_0} = (f - T_{n,f,x_0})' = f' - T'_{n,f,x_0} = f' - T_{n-1,f',x_0}$

$$= R_{n-1,f',x_0}$$

Απόδειξη του θεωρήματος: Με επαγωγή ως προς n.

$n=1$: "Αν $\exists\, f'(x_0)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι αν η g είναι $(n-1)$ φορές παρ/μη στο $[\alpha,\beta]$ και $\exists\, g^{(n)}(x_0)$, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τότε

$$\frac{g(x)-T_{n,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ n-φορές παρ/μη και έστω ότι $\exists\, f^{(n+1)}(x_0)$ για κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$

Ζητάμε το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_{n+1,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και παραγωγίζουμε αριθμητή και παρονομαστή

$$\frac{\left(f(x) - T_{n+1,f,x_0}(x)\right)'}{\left((x-x_0)^{n+1}\right)'} \overset{(*)}{=} \frac{f'(x) - T_{n,f',x_0}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

γιατί εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για $g = f'$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω ότι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-φορές παράγωγη στο $[a,b]$ και έστω ότι $\exists f^{(n)}(x_0)$. Αν p είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ και $\lim \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ τότε $p(x) \equiv T_{n,f,x_0}(x)$.

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε

$$\underbrace{\frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}}_{\displaystyle \frac{p(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 - 0 = 0$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Έστω $q(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim \frac{q(x)}{(x-x_0)^n} = 0 . \text{ Τότε } q(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για το $q = p - T_{n,f,x_0}$ παίρνουμε

$$p - T_{n,f,x_0}(x) \equiv 0 \to p = T_{n,f,x_0}$$

Απόδειξη ισχυρισμού (με επαγωγή ως προς n)

$n=0$: Έχουμε $\lim_{x\to x_0} \frac{c}{(x-x_0)^0} = 0 \Rightarrow c=0.$

$n=1$: Έστω $q(x)$ βαθμού ≤ 1 με

$\lim_{x\to x_0} \frac{q(x)}{x-x_0} = 0.$ Έχουμε $q(x) = \frac{q(x)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$

$\xrightarrow[x\to x_0]{} 0\cdot 0 = 0$

Άρα $q(x_0)=0.$

Άρα $q(x) = \alpha(x-x_0) \Rightarrow \underbrace{\frac{q(x)}{x-x_0}}_{\downarrow\, 0} = \alpha$ άρα $\alpha = 0$

$\Downarrow$

$q\equiv 0.$

Επαγωγικό βήμα: Έστω q βαθμού $\leq n+1$ με

$\lim_{x\to x_0} \frac{q(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$

$\underset{\searrow q(x_0)}{q(x)} = \frac{q(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^{n+1} \longrightarrow 0\cdot 0 = 0$

Άρα $q(x) = p(x)(x-x_0) \Rightarrow 0 = \lim \frac{q(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim \frac{p(x)}{(x-x_0)^n}$

Βαθμός $p\leq n$

$\Downarrow$ επαγωγική υπόθεση

$p\equiv 0$

$\Downarrow$

$q\equiv 0.$

δ) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$.

Αν $|x|<1$ τότε $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-\underset{y}{\underset{\shortparallel}{(-x^2)}}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

Θα δείξουμε ότι το $p(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$ είναι

το $T_{2n,f,0}$

Έχουμε $p(x) = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^n =$

$$= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

και $\dfrac{f(x)-p(x)}{x^{2n}} = \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{1+x^2}}{x^{2n}}$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{(1+x^2)\,x^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Από την πρόταση

$$p(x) = T_{2n,f,0}(x) = T_{2n+1,f,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

Παραδείγματα (συνέχεια)

ε) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $x_0=0$.

Να βρεθεί το $T_{n,f,0}(x)$

1ος τρόπος:

$f(x)=\frac{1}{1-x}$

$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad\Downarrow$

$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}$ $\quad f^{(k)}(0)=k!$

$$T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+\dots+x^n.$$

2ος τρόπος: Μαντεύω ένα πολυώνυμο p βαθμού $\leq n$ που έχει την ιδιότητα $\frac{f(x)-p(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{}0$

Τότε (από την πρόταση) $p=T_{n,f,0}$

Στο παράδειγμα (ε) θεωρώ το

$p(x)=1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Παρατηρώ ότι $\frac{f(x)-p(x)}{x^n}=\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{x^n}=\frac{x^{n+1}}{(1-x)x^n}$

$$=\frac{x}{1-x}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$