15/5

Ασκήσεις (Κεφ. 5)

3) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ τέτοια ώστε:

$$\int_0^1 f(x)x^2\,dx = \frac{f(s)}{3}$$

Η f παίρνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m.
$\forall x\in[0,1]$ $m\le f(x)\le M$

$$\Downarrow$$

$$mx^2 \le f(x)x^2 \le Mx^2$$

Άρα $$m\underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{=1/3} \le \int_0^1 f(x)x^2\,dx \le M\underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{=1/3}$$

$$\Rightarrow m \le 3\int_0^1 f(x)x^2\,dx \le M$$

Από Θ. ενδ. τιμής υπάρχει $s\in[0,1]$

$$f(s) = 3\int_0^1 f(x)x^2\,dx$$

Λύση: Εφαρμόζω το ΘΜΤ ολοκληρωτικού λογισμού για την f και την $g(x)=x^2\ge 0$

$$\exists s:\ f(s)\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

(4) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt$$

Δείξτε ότι $f\equiv 0$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{F(x)} = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{\text{σταθ.}}$$

Η F είναι σταθερή $\Rightarrow F'(x)=0 \quad \forall x$
Όμως επειδή η f είναι συνεχής,

$$F'(x)=f(x)$$

άρα $f(x)=0 \quad \forall x$.

10) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παρ/μη (δηλ f' συνεχής)
Αν $P=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_n=\beta\}$ είναι τυχούσα διαμέριση του $[\alpha,\beta]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\int_\alpha^\beta|f'(x)|dx$$

Σε κάθε $[x_k,x_{k+1}]$ η f είναι παρ/μη και η f' είναι συνεχής $\Longrightarrow$ ολοκληρώσιμη
Από το β' θεμελιώδες θεώρημα

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f'(x)dx$$

$$\Longrightarrow |f(x_{k+1})-f(x_k)|=\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}f'(x)dx\right|\le\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(x)|dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(x)|dx =$$

$\underset{\text{προσθ}}{=}\int_\alpha^\beta|f'(x)|dx$ γιατί τα $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ είναι διαδοχικά με ένωση $[x_0,x_n]=[\alpha,\beta]$

14 Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παρ/σιμη (f' συνεχής)
Δείξτε ότι:

$$\gamma_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx \to 0$$

και

$$\delta_n = \int_a^b f(x)\cdot\sin(nx)\,dx \longrightarrow 0$$

Σημείωση:
Ισχύει με την υπόθεση ότι η f είναι Riemann ολ/ιμη (Λήμμα Riemann-Lebesgue)

$$f(x)\cdot\cos(nx) = f(x)\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\cdot\cos(nx)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx$$

ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$

Παρατηρούμε ότι:

α) $$\left|\left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b\right| = \frac{|f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)|}{n}$$

$$\leq \frac{|f(b)|\cdot\overbrace{|\sin(nb)|}^{\leq 1} + |f(a)|\cdot\overbrace{|\sin(na)|}^{\leq 1}}{n}$$

$$\leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(14) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παρ/σιμη (f' συνεχής)
Δείξτε ότι:

$$\gamma_n=\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx \to 0$$

και

$$\delta_n=\int_a^b f(x)\cdot\sin(nx)\,dx \longrightarrow 0$$

Σημείωση: Ισχύει με την υπόθεση ότι η f είναι Riemann ολ/μη (Λήμμα Riemann-Lebesgue)

$$f(x)\cdot\cos(nx)=f(x)\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\cdot\cos(nx)\,dx=\int_a^b f(x)\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx$$

$$\underset{\text{κατά μέρη}}{\overset{\text{ολοκλήρωση}}{=}}\left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$

Παρατηρούμε ότι:

α) $$\left|\left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b\right|=\frac{|f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)|}{n}$$

$$\leq\frac{|f(b)|\cdot\overbrace{|\sin(nb)|}^{\leq 1}+|f(a)|\cdot\overbrace{|\sin(na)|}^{\leq 1}}{n}$$

$$\leq\frac{|f(b)|+|f(a)|}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

β) Η f' είναι συνεχής άρα φραγμένη.
Υπάρχει $A>0 : \forall x \in [a,b]$ $|f'(x)| \le A$

Τότε $\left| \int_a^b \frac{f'(x)\sin(nx)}{n} dx \right| \le \frac{1}{n} \int_a^b \underbrace{|f'(x)|}_{\le A} \underbrace{|\sin(nx)|}_{\le 1} dx$

$$\le \frac{A(b-a)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

<u>Πρόταση</u> (ολοκλήρωση κατά μέρη)
Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις
Αν οι f', g' είναι ολ/μες τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u>
Έχουμε $(fg)' = \underbrace{f'g + fg'}_{}$

ολ/μη λόγω των υποθέσεων

Από το β' Θεμ. Θεωρ.

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx \underset{\text{τ.Ρ}}{=} \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Παρατήρηση-Ερώτηση (Ασκ 5): Ποια είναι η παράγωγος της $F(x)=\int_0^{f(x)} h(t)dt$ όπου h συνεχής, f παρ/μη

Απάντηση:

$F'(x)=h(f(x))\cdot f'(x)$.

Απόδειξη

Αν θεωρήσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$H(x)=\int_0^x h(t)dt$$

$$\boxed{\left(\int_x^1 f(t)dt\right)'=-f(x)}$$

τότε $F(x)=H(f(x))=(H\circ f)(x)$

$$\Rightarrow F'(x)=H'(f(x))\cdot f'(x)=h(f(x))\cdot f'(x)$$

Άσκηση 11:

Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$.

Ν.δ.ο. $\forall x>0$ ισχύει

$$\underbrace{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt}_{A(x)}=\underbrace{xf(x)}_{B(x)}$$

$$A'(x)=f(x)+f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$B'(x)=f(x)+xf'(x)$$

Αφού $(A-B)'(x)\equiv 0$, η $A-B$ είναι σταθερή

Για $x=0$ έχουμε $A(0)=\int_0^0 f + \int_0^{f(0)=0} f^{-1} = 0 = 0\cdot f(0)=B(0)$

Άρα η $A(x)-B(x)=0$ $\forall x$.

(9) Έστω $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
Δείξτε ότι $\forall x[0,\alpha]$

$$\underbrace{\int_0^x f(u)(x-u)du}_{A(x)} = \underbrace{\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du}_{B(x)}$$

$A(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x f(u)\cdot u\,du$ | $B(x)=\int_0^x G(u)du$

όπου $G(u)=\int_0^u f(t)dt$

$$A'(x)=\int_0^x f(u)du + xf(x)-xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

$$B'(x)=G(x)=\int_0^x f(t)dt$$

Άρα $A'(x)=B'(x)$ $\forall x \Rightarrow A-B$ σταθερή
και βάζοντας $x=0$ βλέπουμε ότι
$A(0)=0=B(0)$

άρα $A\equiv B$

(12) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$

$$|f(x)| \le \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Γράφουμε $|f(x)| = |f(x) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0)}|$

$$\underset{\text{θεωρ}}{\overset{\text{θ' θεμ}}{=}} \left| \int_0^x f'(t)\,dt \right| = \left| \int_0^x f'(t) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{g(t)}}{1}\, dt \right|$$

$$\underset{C-S}{\le} \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2}}_{\sqrt{x}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{x}}_{\le 1} \underbrace{\left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}}_{\substack{\text{Επειδή } (f'(t))^2 \ge 0 \\ \int_0^x (f')^2 \le \int_0^1 (f')^2}} \le 1 \cdot \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Ε33) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολ/μη. Δείξτε ότι:

$$\alpha_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Η f είναι φραγμένη γιατί είναι ολ/μη: $\exists\, M>0$:

$$\forall x\in[0,1]\quad |f(x)|\le M.$$

τότε $|\alpha_n|=\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right|\le\int_0^1 x^n \underbrace{|f(x)|}_{\le M}dx\le$

$$\le M\int_0^1 x^n\,dx = M\cdot\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ε54.6: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$b_n=n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{} f(1)$$

Γράφουμε $b_n=\int_0^1 (x^n)'f(x)\,dx \;\overset{\text{ολ/ση κατά μέρη}}{=}$

$$=\left[x^n f(x)\right]_0^1-\int_0^1 x^n\cdot f'(x)\,dx = f(1)-0-\int_0^1 x^n f'(x)\,dx$$

Η f' είναι ολ/μη (ως συνεχής) και εφαρμόζοντας την άσκηση Ε33 για την f' έχουμε $\alpha_n=\int_0^1 x^n f'(x)\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

άρα $b_n=f(1)-\alpha_n\to f(1)$

Ε35: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, f' συνεχής, $0<f'(x)\le 1$ στο $[0,1]$

Δείξτε ότι: $\int_0^1 (f(x))^3 dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

Ορίζω $G(t)=\left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx$

για $t\in[0,1]$

Ζητάμε $G(1)\ge 0$

Έχουμε $G(0)=0$

Αν δείξουμε ότι $G'\ge 0 \Rightarrow G$ αύξουσα $\Rightarrow G(1)\ge G(0)=0$

$\boxed{18/5}$

<u>Θεώρημα Taylor</u>

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παρ/μη στο $x_0\in(a,b)$

υπάρχει η εφαπτομένη

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \text{ στο σημείο } (x_0,f(x_0))$$

<u>Παρατήρηση</u> Έχουμε

$$\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)-f'(x_0)=0$$