11/5

4α) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής, $f(0)=0$ $\forall x\geq 0$
$|f(x)|\leq Mx+B$

Παίρνω $\varepsilon=1$.
Υπάρχει $\delta>0$: αν $z,w\geq 0$ και $|z-w|<\delta$
τότε $|f(z)-f(w)|<1$.

Έστω $x>0$. Υπάρχει $k\geq 0$: $\frac{k\delta}{2}\leq x<\frac{(k+1)\delta}{2}$
$\left(k=\left[\frac{2x}{\delta}\right]\right)$

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|\leq\left|f(x)-f\left(\tfrac{k\delta}{2}\right)\right|+\left|f\left(\tfrac{k\delta}{2}\right)-f\left(\tfrac{(k-1)\delta}{2}\right)\right|+\dots+\left|f\left(\tfrac{\delta}{2}\right)-f(0)\right|$$

$$<1+1+\dots+1=k+1<\frac{2x}{\delta}+1$$

5β) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, $\int_a^b f(x)dx=0$.
i) νδο $\forall\varepsilon>0$ $\exists[\gamma,\delta]\subseteq[a,b]$: $\forall x\in[\gamma,\delta]$ $f(x)\leq\varepsilon$.

Άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει τότε $\forall$ $[\gamma,\delta]\subseteq[a,b]$ υπάρχει $y\in[\gamma,\delta]$: $f(y)>\varepsilon$.

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$
Για κάθε k στο ~~$[x_k,x_{k+1}]$~~ $[x_k,x_{k+1}]$ υπάρχει y_k : $f(y_k)>\varepsilon$.

$\Rightarrow M_k>\varepsilon$.

$$\text{Τότε } U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)>\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b f}_{=0}=\inf U(f,P)\geq\varepsilon(b-a)$$

$[a,b]$, $\varepsilon = 1$
$\exists\ [\gamma_1, \delta_1] : \forall x \in [\gamma_1, \delta_1] \quad f(x) = 1.$

$$0 = \int_a^b f = \underbrace{\int_a^{\gamma_1} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\gamma_1}^{\delta_1} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\delta_1}^{b} f}_{\geq 0} \Rightarrow \int_{\gamma_1}^{\delta_1} f = 0$$

Επαγωγικά, ορίζουμε $[\gamma_1, \delta_1] \supseteq [\gamma_2, \delta_2] \supseteq \dots \supseteq [\gamma_n, \delta_n] \supseteq \dots$

$\forall x \in [\gamma_n, \delta_n] \quad f(x) \leq 1/n.$

Από αρχή κιβ. διαστημάτων $\Rightarrow \exists y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [\gamma_n, \delta_n]$

τότε $\forall n \quad f(y) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(y) = 0.$

Γενικευμένα ολοκληρώματα

1η περίπτωση: Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, x]$ όπου $\alpha < x < b$.
(Εδώ $b > a$, $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$)
Θέλουμε να ορίσουμε το $\int_a^b f(t)\,dt$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x \to b^-} \int_\alpha^x f(t)\,dt$

και αν υπάρχει λέμε ότι ισούται με $\int_a^b f(t)\,dt$

Ομοίως, αν $f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ (όπου $\alpha < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\alpha = -\infty$) και η f είναι ολ/μη στο $[x, b]$ $\forall\ \alpha < x < b$ τότε ορίζουμε $\int_\alpha^b f(t)\,dt = \lim_{x \to \alpha^+} \int_x^b f(t)\,dt$ αν αυτό το όριο υπάρχει.

Παραδείγματα

1) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{t^2}$

Για κάθε $x>1$ η f είναι συνεχής στο $[1,x]$ άρα ολ/μη και

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=-\frac{1}{x}+1=1-\frac{1}{x}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2}dt=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$$

Άρα $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt=1$.

2) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$

Για κάθε $0<x<1$ η $f(t)=\ln t$ είναι συνεχής στο $[x,1]$ και

$$\int_x^1 \ln t\,dt=\int_x^1 (t\ln t-t)'\,dt=\left[t\ln t-t\right]_x^1$$

$$=-1-x\ln x+x.$$

$$\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$$

Εχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln t\,dt = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[-1 - \underbrace{x\ln x}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to 0}\right] = -1$ (DLH)

Δηλαδή $\int_0^1 \ln t\,dt = -1$.

2η περίπτωση: $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ (μπορεί να έχουμε $\alpha=-\infty$ ή $\beta=+\infty$ ή και τα δύο)

Υποθέτουμε ότι η f είναι ολ/μη σε κάθε $[\gamma,\delta]\subseteq(\alpha,\beta)$

Επιλέγουμε τυχόν $c_1\in(\alpha,\beta)$

Από την υπόθεση η f είναι ολ/μη σε κάθε $[c_1,x]$, $c_1<x<\beta$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\int_{c_1}^{\beta} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\beta^-}\int_{c_1}^{x} f(t)\,dt$

και αν υπάρχει το

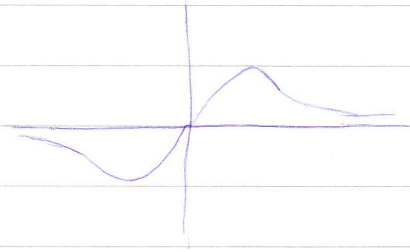
$$\int_{\alpha}^{c_1} f(t)\,dt = \lim_{y\to\alpha^+}\int_{y}^{c_1} f(t)\,dt$$

Αν υπάρχουν και τα δύο, ορίζουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{c_1} f(t)\,dt + \int_{c_1}^{\beta} f(t)\,dt$$

Παραδείγματα:

• $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+1}\,dt$. Παίρνουμε $a=0$.



Υπολογίζουμε (για $x>0$)

το $\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \left[\frac{\ln(t^2+1)}{2}\right]_0^x$

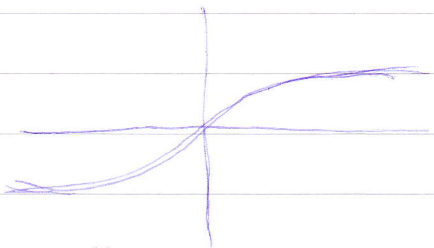
$= \frac{\ln(x^2+1)}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Δηλαδή $\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,dt = +\infty$.

Όμοια $\int_{-\infty}^{0} \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\infty$

Άρα $\nexists \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,dt$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ Έστω $x>0$.



$\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\arctan]_0^x = \arctan x - \arctan 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Αφού η f είναι άρτια

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Άρα, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Κριτήριο του ολοκληρώματος (για σειρές)

Υπάρχει αναλογία ανάμεσα στο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$

και στο $\int_1^{\infty} f(x)dx$, $f \geq 0$.

1) Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν

η $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ είναι άνω φραγμένη.
(γιατί $(S_n) \nearrow$)

2) Αν $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και ολ/μη σε κάθε διάστημα $[1, x]$ τότε η

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \text{ είναι αύξουσα.}$$

Γιατί αν $x<y$ τότε $F(y) - F(x) = \int_x^y \underbrace{f(t)}_{\geq 0} dt \geq 0$

Αν υπάρχει το $\int_1^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ έχουμε

ότι $F(x)$ φραγμ.

Αλλά και αντίστροφα, αν υπάρχει $M>0$:
$\forall x > 1$
$$\int_1^x f(t)dt \leq M$$

τότε $\int_1^{\infty} f = \lim \int_1^x f \leq M$

Δηλαδή το $\int_1^{\infty} f(t)dt$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ η $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ είναι φραγμένη

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ φθίνουσα, με μη αρνητικές τιμές.
Ορίζουμε $\alpha_k = f(\alpha)$ $\quad ((\alpha_k) \searrow)$

τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει $\iff$ το $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει.

Παραδείγματα

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$ $\quad | \quad \alpha_k = f(k) = \frac{1}{k}$

Έχουμε $\int_1^{y} \frac{1}{x}dx = \ln y - \ln 1 \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$

Άρα, το $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ απειρίζεται $\Rightarrow \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

2) Είδαμε ότι $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx \xRightarrow[\alpha_k=\frac{1}{k^2}]{} \sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

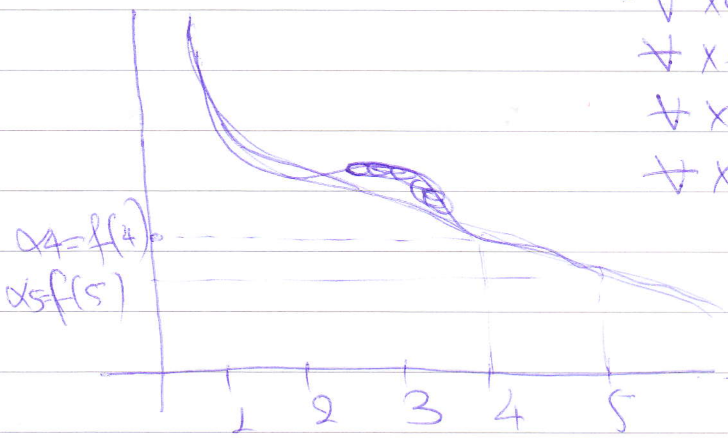
3) Η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει. Μπορούμε να το δούμε και ως εξής:
Θεωρούμε την $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $(\searrow)$

και υπολογίζουμε το $\int_2^{y}\frac{1}{x\ln x}dx =$

$= [\ln(\ln x)]_2^{y} = \ln(\ln y) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{y\to\infty} \infty$

Αφού $\nexists \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$ η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει.

<u>Απόδειξη του κριτηρίου</u>



$\forall x \in [1,2] \quad a_2 \le f(x) \le a_1 \quad (1)$

$\forall x \in [2,3] \quad a_3 \le f(x) \le a_2 \quad (2)$

$\forall x \in [3,4] \quad a_4 \le f(x) \le a_3$

$\forall x \in [4,5] \quad a_5 \le f(x) \le a_4$

$\vdots$

$\forall x \in [n-1,n] \quad a_n \le f(x) \le a_{n-1}$

$(1) \Rightarrow a_2 \le \int_1^2 f(x)dx \le a_1$

$(2) \Rightarrow a_3 \le \int_2^3 f(x)dx \le a_2$

$\vdots$

$a_n \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le a_{n-1}$

$$\underbrace{a_2+a_3+\dots+a_n}_{S_n-a_1} \le \int_1^n f(x)dx \le \underbrace{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}$$

$(\Longrightarrow)$ Η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

$\Rightarrow \exists M>0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq M$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1} \leq M$

$$\Rightarrow \forall y>1 \quad \underbrace{\int_1^y f(x)dx}_{=F(y)} \leq \int_1^{[y]+1} f(x)dx \leq M$$

άρα η $F(y)$ είναι φραγμένη

$\Longrightarrow$ το $\int_1^{\infty} f$ υπάρχει.

$(\Longleftarrow)$ Αν το $\int_1^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει τότε υπάρχει $M>0$:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^n f(x)dx \leq M$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n - a_1 \leq M$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq M + a_1$

$\Rightarrow (S_n)$ άνω φραγμένη $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει.