Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Συμβολισμός: α) Η $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αν (i) υπάρχει η $F'(x)$ σε κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και (ii) $F'(\alpha)=F'_+(\alpha)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{F(\alpha+h)-F(h)}{h}$

και $F'(\beta)=F'_-(\beta)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{F(\beta+h)-F(\beta)}{h}$

β) Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και αν $\alpha\leq x<y\leq\beta$ τότε

$$\int_y^x f(t)\,dt = -\int_x^y f(t)\,dt$$

Επίσης ορίζουμε $\int_x^x f(t)\,dt = 0$.

Με αυτή τη συμφωνία, η $\int_x^y f(t)\,dt = \int_x^z f(t)\,dt + \int_z^y f(t)\,dt$ ισχύει $\forall\, x,y,z\in[\alpha,\beta]$

πχ $$\int_x^y f = -\int_y^x f = -\left(\int_y^z f + \int_z^x f\right) = -\int_y^z f - \int_z^x f$$

$$= \int_x^z f + \int_z^y f$$

Θεώρημα 1: (Θεώρημα μέσης τιμής του ολ. λογισμού)
Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και έστω $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, μη αρνητική.

Υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$: $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = f(y)\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

Πόρισμα: Αν πάρουμε $g(x)=1$ στο Θεώρημα 1 έχουμε:

"Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(y)\int_\alpha^\beta 1\,dx = f(y)(\beta-\alpha)$$

Δηλ. $\exists\, y\in[\alpha,\beta]$:

$$f(y)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad (= \text{μέση τιμή της } f)$$

Απόδειξη
Η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη (γινόμενο δύο ολοκληρ.)
• Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[\alpha,\beta]$:
$\forall\, x\in[\alpha,\beta]\quad m\le f(x)\le M\quad (\text{και } f([\alpha,\beta])=[m,M])$

• Πολλαπλασιάζουμε με $g(x)\ge 0$.

$$\forall\, x\in[\alpha,\beta]\quad m g(x)\le f(x)g(x)\le M\cdot g(x)$$

$$\Rightarrow m\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx \le M\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \quad (*)$$

Ξέρουμε ότι $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ γιατί $g \geq 0$.

· Αν $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ τότε διαιρώντας με αυτό την (*) έχουμε:

$$\underbrace{m}_{\min(f)} \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq \underbrace{M}_{\max(f)}$$

Απο θεώρημα ενδ. τιμής, $\exists\, y \in [a,b] : f(y) = \frac{\int fg}{\int g}$

· Αν $\int_\alpha^b g(x)dx = 0$, από την (*) έχουμε

$$0 \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Τότε το ζητούμενο είναι: $\exists y : \underset{\int fg}{0} = f(y) \cdot \underset{\int g}{0}$

Ορισμός: (αόριστο ολοκλήρωμα)
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ $\forall x \in [\alpha, b]$
Ορίζουμε

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ με } F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

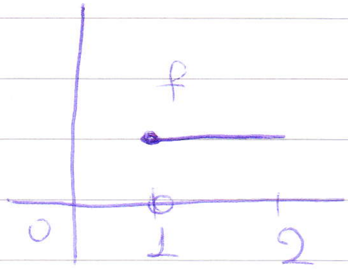
Η F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Θεώρημα 2: Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 3: (α' Θεμελιώδες Θεώρημα)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $F(x)=\int_a^x f(t)\,dx$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0\in[a,b]$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$

Παράδειγμα:



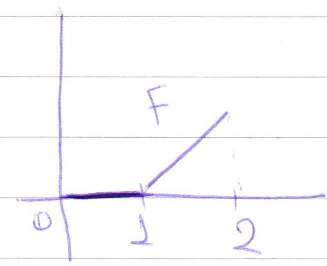
$f:[0,2]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt=0$$

τότε

$$F(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 1 \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$



Η F δεν είναι παρ/μη στο σημείο 1.

Απόδειξη του Θ.2:

Η f είναι ολ/μη άρα είναι φραγμένη.
Δηλ υπάρχει $M>0$: $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq M$:
Θα δείξουμε ότι η F είναι Lipschitz με σταθερά M:

$$\forall x,y \in [a,b] \quad |F(x)-F(y)| \leq M|x-y|$$

Έστω $x,y \in [a,b]$ με $x>y$ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας)

Τότε: $$|F(x)-F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt \leq \int_y^x M\,dt$$

$$= M(x-y) = M|x-y|$$

Ασκήσεις

30) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε ~~fn~~

$$f_n = \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}$$

Τότε $f_n \longrightarrow M = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$

Για κάθε n και για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε

$$|f(x)| \le M \Rightarrow |f(x)|^n \le M^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|^n\,dx = M^n(b-a)$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \le \left[M^n(b-a)\right]^{1/n} = M\sqrt[n]{b-a} \to M$$

$$\Rightarrow \limsup_n \gamma_n \le \underbrace{\limsup M\sqrt[n]{b-a}}_{=M}$$

Δηλαδή $\limsup_n \gamma_n \le M$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$M \le \liminf_n \gamma_n$, (γιατί τότε $\limsup \gamma_n \le M \le \liminf \gamma_n \le \limsup \gamma_n$ άρα $\exists \lim \gamma_n = M$)

Υπάρχει $x_0\in[a,b]$: $|f(x_0)| = M$.
Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα για τυχόν $\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<M)$
υπάρχει $\delta>0$: $\forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ $|f(x)| > M-\varepsilon$
Τότε

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx = \int_a^{x_0-\delta} \underbrace{|f(x)|^n}_{\ge 0}dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \underbrace{|f(x)|^n}_{\ge M-\varepsilon}dx + \int_{x_0+\delta}^{b} \underbrace{|f(x)|^n}_{\ge 0}dx$$

$$\ge 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (M-\varepsilon)^n\,dx + 0 = (M-\varepsilon)^n\cdot(2\delta_\varepsilon)$$

Άρα $\gamma_n = \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \ge \sqrt{(M-\varepsilon)^n(2\delta_\varepsilon)} =$

$$= (M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta_\varepsilon} \longrightarrow (M-\varepsilon)\cdot 1 = M-\varepsilon$$

Άρα $\liminf_n g_n \geq \lim_n [(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta_\varepsilon}] = M-\varepsilon$

Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ (μικρό) έχουμε
$\liminf_n g_n \geq M$

Ασκ: $\boxed{10, 11, \ldots}$ (α) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Τότε είναι ολ/μη.

(β) Υπάρχει $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολ/μη με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

α) (Από ασκ 9): Αν η $f:[k,\lambda]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και για κάθε $k<\mu<\lambda$ είναι ολ/μη στο $[k,\mu]$ τότε είναι ολ/μη.

Θα δείξουμε ότι η f είναι ολ/μη στα διαστήματα:

$$[a,y_1],[y_1,y_2],\ldots,[y_{m-1},y_m],[y_m,b]$$

$\xRightarrow{\text{προσθ.}}$ η f είναι ολ/μη στο $[a,b]$.

Για καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα αρκεί να δείξουμε το εξής:
"Αν η $f:[u,v]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και η f είναι συνεχής στο (u,v) τότε η f είναι ολ/μη".

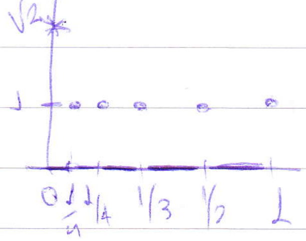
Θεωρούμε $u<w<v$.
Για κάθε $x\in(u,w)$ η f είναι ολ/μη στο $[x,w]$ γιατί είναι συνεχής σε αυτό.

$\xRightarrow{\text{άσκ 9}}$ η f ολ/μη στο $[u,w]$

ομοίως στο $[w,v]$.

Ορίζουμε $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}\\ \sqrt{2}, & \text{αν } x=0\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$



Η f είναι ασυνεχής στα σημεία $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots$
και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

Έστω $0<\delta<1$.
Στο $[\delta,1]$ η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Πρέπει να είναι της μορφής
$\frac{1}{n}$ με $\delta\le\frac{1}{n}\le 1$
$\Rightarrow n\le\frac{1}{\delta}$ δηλαδή $n=\underbrace{1,2,3,\dots,[\tfrac{1}{\delta}]}_{\text{πεπερασμένα το πλήθος}}$.

Η f είναι και φραγμένη στο $[\delta,1]$
άρα η f είναι ολ/μη στο $[\delta,1]$
από το (α).

Τώρα, από άσκ 9: "f φραγμένη στο $[0,1]$ και
f ολ/μη στο $[\delta,1]$ $\forall\, 0<\delta<1$

$\Longrightarrow f$ ολ/μη στο $[0,1]$"

Ερωτήσεις κατανόησης

6) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και

$\forall$ διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει

$L(f,P)=U(f,P)$ και η f είναι σταθερή

7) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και
$\exists$ διαμέριση $P: L(f,P)=U(f,P)$
τότε η f είναι σταθερή ($\Rightarrow$ ολ/μη)

6) **ΝΑΙ**

Παίρνω $P=\{a<b\}$ Έχω ~~[illegible]~~

$$L(f,P)=m(b-a)=M(b-a)=U(f,P)$$

όπου
$$\left.\begin{aligned} m&=\inf\{f(x),\ a\le x\le b\}\\ M&=\sup\{f(x),\ a\le x\le b\}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall x\in[a,b]\quad f(x)=m=M.$$

7) **ΝΑΙ**