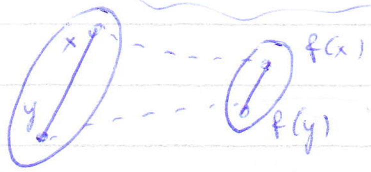
03/04/2015

Θεώρημα σταθερού σημείου (Ουσιαστικά άσκηση στις Βασικές Ακολουθίες)

• (ΟΡΙΣΜΟΣ) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι (γνήσια) συστολή αν υπάρχει $0<b<1$:

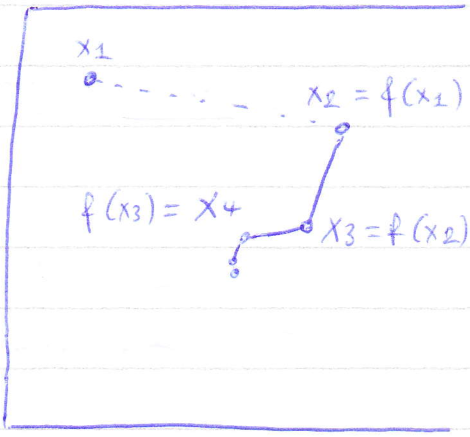
$$\forall x,y \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } |f(x)-f(y)| \leq b|x-y|$$

• (ΘΕΩΡΗΜΑ) Κάθε τέτοια συνάρτηση έχει μοναδικό σταθερό σημείο : δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0)=x_0$



"Μικραίνουν" οι αποστάσεις.

Απόδειξη: Έστω $x_1 \in \mathbb{R}$.
Ορίζουμε $x_2 = f(x_1)$.
Κατόπιν ορίζουμε $x_3 = f(x_2)$,
$x_4 = f(x_3)$.
Επαγωγικά ορίζουμε $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=1,2,\dots$



ΒΗΜΑΤΑ (α) Θδο η (x_n) είναι βασική
(β) Αφού η (x_n) είναι βασική, έχουμε :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : x_n \to x_0 \xRightarrow[\text{Αρχή Μεταφοράς}]{} f(x_n) \to f(x_0).$$

Όμως $f(x_n) = x_{n+1} \to x_0$. Άρα $f(x_0) = x_0$

(γ) (Γιατί είναι μοναδικό;) Αν η f έχει 2 διαφορετικά σταθερά σημεία, δηλ. $\exists x \neq y$: $f(x)=x$ και $f(y)=y$, τότε

$$|x-y| = |f(x)-f(y)| \leq b|x-y|.$$

Όμως $|x-y|>0$.

$\Rightarrow 1 \leq b$. Κατέληξα σε άτοπο.

Πως δείχνουμε το (α):

$$|x_3-x_2| = |f(x_2)-f(x_1)| \leq b\,|x_2-x_1|$$

$$|x_4-x_3| = |f(x_3)-f(x_2)| \leq b\,|x_3-x_2| \leq b^2|x_2-x_1|$$

(Εφαρμόζω το προηγούμενο)

Επαγωγικά, θα έχω:

$$\boxed{|x_n-x_{n-1}| \leq b^{n-2}|x_2-x_1| \text{ για κάθε } n\geq 2} \quad (*)$$

Άρα, αν $n>m$, τότε $|x_n-x_m| \leq |x_n-x_{n-1}|+\ldots+|x_{m+2}-x_{m+1}|+|x_{m+1}-x_m|$

$$\underset{(*)}{\leq} b^{n-2}|x_2-x_1|+\ldots+b^{m-1}|x_2-x_1|+b^{m-2}|x_2-x_1|$$

$$= b^{m-2}|x_2-x_1|\Big(\underbrace{b^{n-m}+\ldots+b+1}_{\text{Γεωμετρική Πρόοδος}}\Big)$$

$$= b^{m-2}\cdot|x_2-x_1|\cdot\frac{1-b^{n-m+1}}{1-b} < b^{m-2}|x_2-x_1|\cdot\frac{1}{1-b}$$

$$= \left(\frac{|x_2-x_1|}{b^2(1-b)}\right)b^m = A\cdot b^m, \text{ όπου } A=\frac{|x_2-x_1|}{b^2(1-b)}$$

- Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $0<b<1$, έχουμε $b^n\to 0$, άρα $\exists n_0: b^{n_0}<\frac{\varepsilon}{A}$.
  Τότε, $\forall n>m\geq n_0$, ισχύει $|x_n-x_m|<A\cdot b^m \underset{m\geq n_0}{\leq} Ab^{n_0}<\varepsilon$.

Άρα η (x_n) είναι βασική και η απόδειξη τελείωσε. ✓

Ερωτήσεις Κατανόησης (Σωστό ή λάθος;)

15) Η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής;

I. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής

II. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

f ομ. συνεχής $\Longleftrightarrow$ $\exists$ουν τα $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ και είναι στο $\mathbb{R}$.

Λόγω του II, εξετάζουμε αν υπάρχουν τα όρια.

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=2$$

$\boxed{\text{ΟΧΙ}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x^2}+\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$$

---

16 Η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}$ είναι ομ. συν.;

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ $\boxed{\text{ΟΧΙ}}$

17 Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι φραγμένη, τότε δεν είναι ομ. συνεχής. $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

Έστω ότι η f είναι ομ. συν. Τότε: (i) Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$
(ii) $\exists \lim_{x\to 1^-} f(x)=l$, $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)=m$

Η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με
$$F(x)=\begin{cases} l, & x=1\\ f(x), & 0<x<1\\ m, & x=0\end{cases}$$ είναι συνεχής.

Άρα η F είναι φραγμένη (Απ. I) $\Rightarrow \exists M>0:\ \forall x\in[0,1]\ |F(x)|\le M$
$\Rightarrow \forall x\in(0,1)\ |f(x)|=|F(x)|\le M$.
Άρα f φραγμένη

18

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής. Αν (x_n) βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, τότε η $f(x_n)$ είναι βασική. $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$ <u>πρόταση</u>

19 Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ ομ. συν. Τότε το $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

- Ξέρουμε ότι $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)=l\in\mathbb{R}$. Αφού $\frac{1}{n}\to 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right)\to l$ (Αρχή της Μεταφοράς για το όριο)

Εναλλακτικά...

- $\frac{1}{n}\to 0$ (βασική) $\xRightarrow{18}$ $f\left(\frac{1}{n}\right)$ βασική $\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

20. $f(x)=x$ ομ. συν.
$g(x)=\sin x$ ομ. συν.
αλλά η $(f\cdot g)(x)=x\cdot\sin x$ δεν είναι ομ. συν.

21. $f(x)=\begin{cases} x & , x>0\\ 2x & , x\le 0\end{cases}$ ομ. συν. στο $\mathbb{R}$

22. Κάθε φραγμένη συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομ. συν.

---

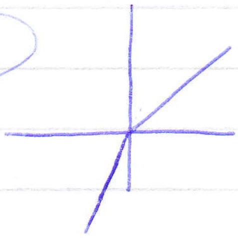
20 $f(x)=x$, $f'(x)=1$, f' φραγμένη $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$
$g(x)=\sin x$, $g'(x)=\cos x$
$|g'(x)|=|\cos x|\le 1$, g' φραγμένη $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

$(f\cdot g)(x)=x\cdot\sin x$ $\boxed{\text{ΝΑΙ, ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ}}$

Υπενθύμιση: Ορίζουμε $x_n=2n\pi$, $y_n=2n\pi+\frac{1}{n}$

III. Αν η f είναι ομ. συνεχής σε δύο διαστήματα που έχουν κοινό άκρο, τότε είναι ομ. συνεχής και στην ένωσή τους.

---

21  $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$ (Με την τεχνική του κολλήματος ή με τον ορισμό)

1ος Τρόπος

Έστω $\varepsilon>0$. Παίρνω $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$.

- Αν $x,y>0$, τότε $|f(x)-f(y)|=|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$
- Αν $x,y\le 0$, τότε $|f(x)-f(y)|=|2x-2y|=2|x-y|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
- Αν $x\le 0$ και $y>0$, τότε

$$|f(x)-f(y)|=|2x-y|=y-2x<2y-2x=2|y-x|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$2^{o\varsigma}$ Τρόπος / Στο $[0,+\infty)$ έχω $f'(x)=1$, $\forall x\in(0,+\infty)$
$\Rightarrow$ Η f είναι ομ. συν.

Στο $(-\infty,0]$ έχω $f'(x)=2$, $\forall x\in(-\infty,0)$
$\Rightarrow$ Η f είναι ομ. συν.

22 $\boxed{\text{ΟΧΙ}}$ Αντιπαράδειγμα $\to$ $f(x)=\cos(x^2)$ στο $\mathbb{R}$

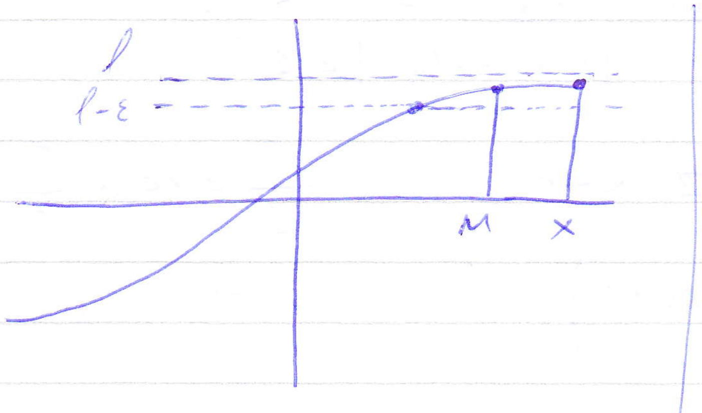
$\boxed{2^{\eta}\ \text{ώρα}}$

IV. Αν η $f: I\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του I και η f' είναι φραγμένη, τότε:
f Lipschitz $\Rightarrow$ f ομ. συν.

V. Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Αν $\exists$ το $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι ομ. συν.

25 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φραγμένη, συνεχής και μονότονη.
Τότε η f είναι ομ. συν.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα.



Δείχνουμε ότι $\exists$ το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Ορίζουμε $l=\sup\underbrace{\{f(x): x\in\mathbb{R}\}}_{A}$

$l=\sup A$

$A \to$ μη κενό $(\pi.\chi.\ f(0)\in A)$
και
$A \to$ φραγμένο

Έστω $\varepsilon>0$. Ο $l-\varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα $\exists M\in\mathbb{R}: l-\varepsilon<f(M)$. Τότε, $\forall x\geq M$, $l-\varepsilon<f(M)$.

$$l-\varepsilon<f(M)\underset{f\uparrow}{\leq} f(x)\leq l<l+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall x\geq M \quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x\in\mathbb{R}\} = m$$

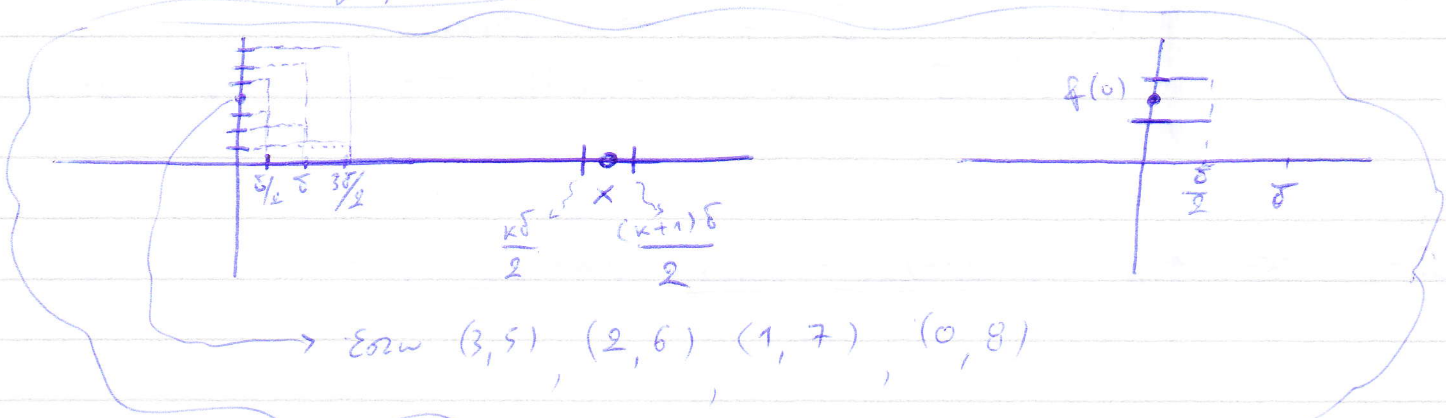
και κατόπιν εφαρμόζουμε το V. και το III.

Ασκήσεις

10 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής. Τότε $\exists\, A, B>0$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)| \le \underbrace{A|x| + B}_{\text{Γραμμική Συνάρτηση}}$ (Η f "φράσσεται" από γραμμική συνάρτηση)

Θα το δείξουμε για $x>0$



Παίρνουμε $\varepsilon=1$.

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει κάποιο $\delta>0$:

"Αν $x,y\in\mathbb{R}$ και $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<1$"

Έστω $x>0$. Υπάρχει κάποιος $k\in\mathbb{Z}$ $k\geq 0$, ώστε $k\cdot\frac{\delta}{2} \le x < (k+1)\frac{\delta}{2}$

$\left(k = \left[\frac{2x}{\delta}\right],\ k \le \frac{2x}{\delta} < k+1 \right)$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

Ορίζουμε $y_0=0$, $y_1=\frac{\delta}{2}$, $y_2 = 2\frac{\delta}{2}$, ..., $y_k = k\cdot\frac{\delta}{2}$

Τότε $|f(x)-f(0)| \le \underbrace{|f(x)-f(y_k)|}_{\le \frac{\delta}{2}} + |f(y_k)-f(y_{k-1})| + \dots + |f(y_1)-f(y_0)|$

Τα x, y_k απέχουν απόσταση $\le \frac{\delta}{2}$ .... y_1, y_0 απέχουν απόσταση $= \frac{\delta}{2}$

$$< \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{k+1\text{ - άσοι}} = k+1$$

Άρα $|f(x)| \le |f(0)| + |f(x)-f(0)| < |f(0)| + 1 + k \le f(0) + 1 + \frac{2}{\delta}x$

Άρα, $\forall x>0$, $|f(x)| \le Ax+B$, όπου $A=\frac{2}{\delta}$ και $B=|f(0)|+1$

- Ομοίως για $x<0$ (με $-\frac{\delta}{2}, -\frac{2\delta}{2}, \dots$, στο $-x$)

(11) Έστω $n \geq 2$. Δείξτε ότι η $f(x)=x^n$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι η $g(x)=x\ln x$ δεν είναι ομ. συν. στο $[1,+\infty)$

<u>Αποδ.</u>: Έστω ότι ήταν. Από την άσκηση 10, θα υπήρχαν A, B θετικοί, ώστε:

(i) $x^n \le Ax+B$, $\forall x>0$ ή, αντίστοιχα,

(ii) $x\ln x \le Ax+B$, $\forall x \geq 1$

(i) $\Longrightarrow x^{n-1} \le A + \frac{B}{x}$ $\quad \forall x>0$

$$\begin{array}{ccc} x^{n-1} & \le & A+\frac{B}{x} \\ \downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\ +\infty & & A \end{array}$$

(ii)

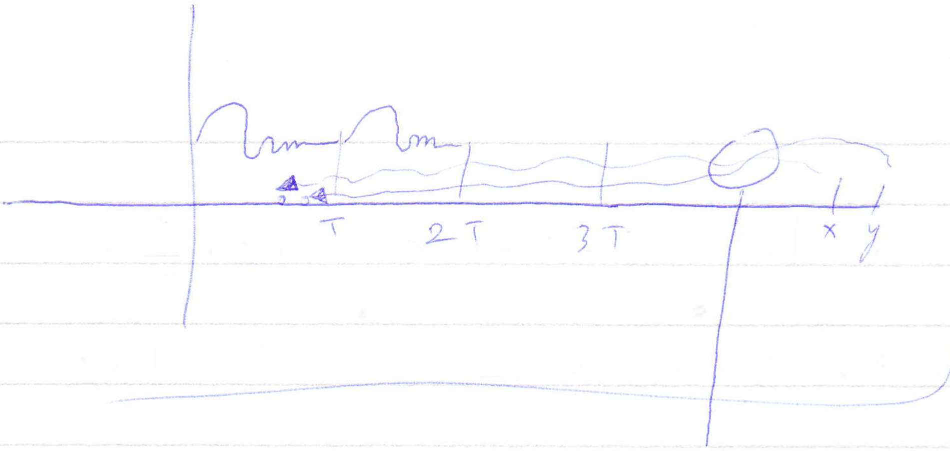
$$\begin{array}{ccc} \ln x & \le & A+\frac{B}{x} \\ \downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\ +\infty & & A \end{array}$$

$\ln x$: ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ

$A+\frac{B}{x}$: ΦΡΑΓΜΕΝΗ

(26) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T>0$ και συνεχής

$\Longrightarrow$ ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$.



Έστω $\varepsilon > 0$

Η f είναι ομ. συν. στο $[0, 2T]$
(συνεχής σε κλειστό διαστ.)

Άρα $\exists \delta > 0$: (με $\delta < T$, μπορώ να το επιλέξω έτσι)

"Αν $u, v \in [0, 2T]$ και $|u - v| < \delta$, τότε $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$"

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, με $|x - y| < \delta$. $\boxed{\text{ΧΠΓ } x < y}$

$$\exists m \in \mathbb{Z} : 0 \leq \underbrace{x - mT}_{u} \leq T$$

Θέτουμε $v = y - mT$. Τότε $|f(x) - f(y)| = |f(u) - f(v)|$ και

$$|u - v| = |x - \cancel{mT} - y + \cancel{mT}| < \delta$$

Όμως $0 \leq u \leq T \Rightarrow 0 \leq u \leq v \leq u + \delta \leq T + T = 2T$.

Δηλ. $u, v \in [0, 2T]$, άρα $|\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{f(u)}} - \underset{f(y)}{\underset{\parallel}{f(v)}}| < \varepsilon$