Απόδειξη: (⇐) Θέτω $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$

$t_n = a_m+a_{m+1}+\dots+a_{m+n-1}$

Ξέρω ότι $t_n \to t \in \mathbb{R}$

Παίρνω $n>m$ και γράφω

$$s_n = (a_1+a_2+\dots+a_{m-1}) + a_m+\dots+a_n = (a_1+a_2+\dots+a_{m-1}) + t_{n-m+1} \xrightarrow{n\to\infty} (a_1+\dots+a_{m-1})+t$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim s_n = (a_1+\dots+a_{m-1})+t = (a_1+\dots+a_{m-1}) + \lim t_n = (a_1+\dots+a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

ΜΑΘΗΜΑ 8ο 13/03/15

Σειρές - Κριτήρια σύγκλισης

ΑΥΤΑ ΤΑ ΕΧΟΥΜΕ ΚΑΝΕΙ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $a_k \to 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Έστω ότι $a_k \geq 0$ για κάθε k. Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει $M>0$: $\forall n$ $s_n \leq M$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (κριτήριο συμπύκνωσης). Έστω ότι $a_k \downarrow 0$. Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Εφαρμογή: Η $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $p>1$.
(p-σειρά)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε όσα κάνουμε θα προστεθεί αργότερα το κριτήριο ολοκληρώματος (~ κριτήριο συμπύκνωσης)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει

Παραδείγματα: (1) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$

συγκλίνει απολύτως γιατί η $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

(2-σειρά και $2>1$)

(2) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως γιατί

η $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει (αρμονική σειρά)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν $a_k \geq 0$ τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως $\Leftrightarrow$ $\sum |a_k| = \sum a_k$ συγκλίνει

ΠΡΟΤΑΣΗ 4: Αν η $\sum |a_k|$ συγκλίνει τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει. (Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει)

Απόδειξη:

[ΙΔΕΑ: Θ.νδο $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$
$\hookrightarrow \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$ ← τριγωνική ανισότητα]

Παίρνω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m > n \geq n_0$ το $|a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$.
Ξέρω ότι η $\sum a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο Cauchy.
Ξέρω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Από το κριτ. Cauchy
$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m > n \geq n_0: \left||a_{n+1}| + \dots + |a_m|\right| < \varepsilon$.

Όμως $|a_{n+1} + \dots + a_m| \underset{\text{τριγ. ανισ.}}{\leq} |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$

Το αντίστροφο της Πρότασης 4 δεν ισχύει:

Θα δείξουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει (όμως δεν συγκλίνει απολύτως γιατί η $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει).

• Πρέπει να δείξουμε ότι $\exists S \in \mathbb{R}: S_n \to S$

• Θεωρούμε ακολουθία $S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \dots +$

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} <$$

$$< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} < 1.$$

• Η S_{2n} είναι αύξουσα: $S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}} > S_{2n}$

Αφού η S_{2n} είναι αύξουσα και άνω φραγμένη $\exists S \in \mathbb{R}: S_{2n} \to S \in \mathbb{R}$.

• Τώρα, γράφουμε $S_{2n+1} = \underset{\downarrow \atop S}{S_{2n}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{2n+1}} \to S + 0 = S$

Αφού $\lim S_{2n} = S = \lim S_{2n+1}$

$$\Downarrow$$

$$S_n \to S$$

Είδαμε ότι: η απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ σύγκλιση (ΠΡΟΤΑΣΗ 4) και ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αν μια σειρά <u>συγκλίνει</u> αλλά <u>δεν συγκλίνει απολύτως</u> τότε λέμε ότι <u>συγκλίνει υπό συνθήκη</u>

ΠΡΟΤΑΣΗ 5: (Κριτήριο σύγκρισης). Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Υποθέτουμε ότι $\beta_k \geq 0$ και ότι υπάρχει $M>0$: και $\Sigma \beta_k$ συγκλίνει

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |a_k| \leq M \cdot \beta_k$$

Τότε, η Σa_k συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη: Θέτουμε $t_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ και $S_n = |a_1| + \dots + |a_n|$.
Αφού η $\Sigma \beta_k$ συγκλίνει, η t_n είναι άνω φραγμένη
$\exists A>0 : \forall n \in \mathbb{N} : t_n \leq A$.
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$: $S_n = |a_1| + \dots + |a_n| \leq M \cdot \beta_1 + \dots + M \cdot \beta_n =$

$$= M(\beta_1 + \dots + \beta_n) = M \cdot t_n \leq M \cdot A.$$

Άρα, η (S_n) είναι άνω φραγμένη $\xrightarrow{\text{ΠΡ.2}} \Sigma |a_k|$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{ΠΡ.4}} \Sigma a_k$ συγκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (Οριακό κριτήριο σύγκρισης). Έστω (a_k), (β_k).
Υποθέτουμε ότι $\beta_k > 0$ (1), η $\Sigma \beta_k$ συγκλίνει (2) και
$\exists \lim \frac{a_k}{\beta_k}$ στο $\mathbb{R}$. (3)

Τότε, η Σa_k συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη: Αφού η ακολουθία $\frac{a_k}{\beta_k}$ συγκλίνει σε πε. αριθμό, τότε είναι και φραγμένη : $\exists M>0$:

$$\left|\frac{a_k}{\beta_k}\right| \leq M \Rightarrow \forall k: |a_k| \leq M \cdot |\beta_k| = M \cdot \beta_k$$

Άρα, ικανοποιείται η ΠΡΟΤΑΣΗ 5 και έπεται ότι η Σa_k συγκλίνει απολύτως.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 7</u> (Κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς)

Έστω $a_k, \beta_k > 0$. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{a_k}{\beta_k} \xrightarrow{k\to\infty} \ell > 0 \quad (\ell \neq 0 \text{ και } \ell \neq +\infty).$$

Τότε, η Σa_k συγκλίνει αν και μόνο αν ($\Leftrightarrow$) η $\Sigma \beta_k$ συγκλίνει

<u>Απόδειξη</u> ($\Leftarrow$) Η $\Sigma \beta_k$ συγκλίνει και $\frac{a_k}{\beta_k} \to \ell \xRightarrow{\text{Π.6}}$

Σa_k συγκλίνει και $\frac{\beta_k}{a_k} \to \frac{1}{\ell} \xRightarrow{\text{Π.6}} \Sigma \beta_k$ συγκλίνει

<u>Απλά Παραδείγματα:</u>

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ (3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$

(1) Θεωρούμε την $|a_k| = \frac{|\sin(kx)|}{k^2} \leq \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\beta_k}$

και η $\Sigma \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει (2-σειρά, $2>1$)

$\xRightarrow{\text{Π.5}} \Sigma |a_k|$ συγκλίνει $\xRightarrow{\text{Π.4}} \Sigma a_k$ συγκλίνει

(2) Ορίζουμε $\beta_k = \frac{1}{k^3}$. Έχουμε $\frac{a_k}{\beta_k} = \frac{k^3(k+1)}{k^4+k^2+3} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to \frac{1}{1} = 1 > 0$

Άρα η $\Sigma \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συμπεριφέρεται όπως η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$,

η οποία συγκλίνει (3-σειρά, $3>1$)

Αλλιώς $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3} \le \frac{k+k}{k^4} = \frac{2k}{k^4} = 2\cdot\frac{1}{k^3}$

(3) Ορίζουμε $\beta_k = \frac{1}{k}$. Τότε $\frac{a_k}{\beta_k} = \frac{k(k+1)}{k^2+2} = \frac{k^2+k}{k^2+2} \longrightarrow 1 > 0$.

Αφού η $\sum \beta_k = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει τότε θα αποκλίνει και η $\sum a_k$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 8</u> (Κριτήριο του Λόγου d'Alambert)

Έστω $a_k \neq 0$

(α) Αν $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l < 1$ τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.

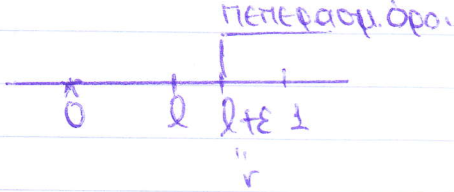
(β) Αν $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l > 1$ τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει

[Η περίπτωση που χρησιμοποιούμε: Αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to l < 1$

τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει και αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to l > 1$

τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει.

<u>Απόδειξη:</u>



Υπάρχει $\varepsilon > 0 : r := l+\varepsilon < 1$

Από χαρακτ. limsup το $\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > l+\varepsilon = r\right\}$

είναι πεπερασμένο. Άρα $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le r \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_{k+1}| \le r \cdot |a_k|$.

Τότε: $|a_{N+1}| \le r \cdot |a_N|$

$|a_{N+2}| \le r \cdot |a_{N+1}| \le r^2 \cdot |a_N|$

$|a_{N+3}| \le r |a_{N+2}| \le r^3 \cdot |a_N|$

$\vdots$

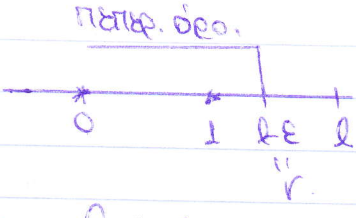
$\forall s: \ |a_{N+s}| \le r^s \cdot |a_N|$

Θέτοντας $n=N+s$ έχουμε $\forall n>N$ ισχύει $|a_n| \le r \Rightarrow |a_n| \le \frac{|a_N|}{r^N} r^n$

Αφού $r<1 \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n$ συγκλίνει

Από κριτήριο σύγκρισης (Π.4) η $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

(β) Παρόμοια:



Βρίσκω $\varepsilon>0: r=\ell-\varepsilon>1$

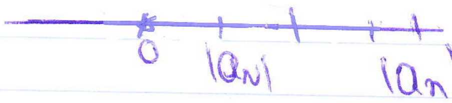
Από χαρακτ. του liminf το $\{k: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \ell-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N: n \ge N: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge \ell-\varepsilon = r > 1$

Έχουμε $|a_{N+1}| \ge r\cdot|a_N| > |a_N|$

$|a_{N+2}| \ge r\cdot|a_{N+1}| > |a_{N+1}| > |a_N|$

$\Rightarrow \dots \; \forall n>N: |a_n| > |a_N| \Rightarrow |a_n| \not\to 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow a_n \not\to 0 \xRightarrow{\text{Π.1}} \sum a_k$ αποκλίνει

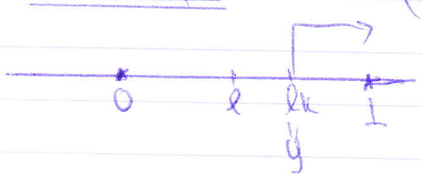
__ΠΡΟΤΑΣΗ 9__ (κριτήριο ρίζας Cauchy)

Έστω $(a_k) \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \ell < 1$, τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει απολύτως

(β) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \ell > 1$, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει.

__Απόδειξη:__



(α) Παίρνω $\varepsilon>0 : r=\ell+\varepsilon<1$

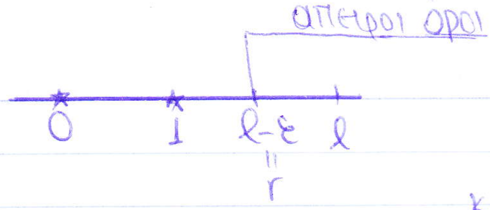
$\exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \ge k_0: \sqrt[k]{|a_k|} \le \ell+\varepsilon = r$

$\Rightarrow \forall k \ge k_0: |a_k| \le r^k = b_k$

Αφού $0<r<1$, η $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{Π.5}}$ η $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{Π.4}}$

$\rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

(β)



Υπάρχουν άπειροι $k\in\mathbb{N}$: $\sqrt[k]{|a_k|} > \ell-\varepsilon > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ ξ: άπειρα $k\in\mathbb{N}$: $|a_k|>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_k| \not\to 0$ (αλλιώς, όλοι τελικά οι $|a_k|$ θα ήταν <1)

$\Rightarrow a_k \not\to 0 \underset{\text{Π.1}}{\Longrightarrow} \sum a_k$ αποκλίνει

ΜΑΘΗΜΑ 9ο 16/03/15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*** (30) Έστω ότι $a_k>0$ για κάθε k και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

ΝΔΟ: Οι (i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν

Κριτήριο σύγκρισης: (i) $\frac{a_k^2}{a_k} = a_k \to 0$ γιατί η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

(ii) Όμοια $\frac{\frac{a_k}{1+a_k}}{a_k} = \frac{1}{1+a_k} \to \frac{1}{1+0} = 1 \underset{\text{κριτ. σύγκρισης}}{\overset{\text{οριακό}}{\Longrightarrow}}$ Η $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει

(iii) Όμοια $\frac{\frac{a_k^2}{1+a_k^2}}{a_k} = \frac{a_k}{1+a_k^2} \to \frac{0}{1+0} = 0 \Rightarrow \dots$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Άλλος τρόπος για (i): Η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow a_k \to 0$

Άρα $\exists k_0\in\mathbb{N}: \forall k \geq k_0 : 0 < a_k < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0 : 0 < \underbrace{a_k^2 < a_k}_{\text{κριτ. σύγκρισης}} < 1$

Άρα η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει γιατί η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Έπεται λοιπόν ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

31) Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε k και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει
ΝΔΟ: η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}$ συγκλίνει

(*) Αν επιπλέον η (a_k) είναι φθίνουσα, ΝΔΟ ισχύει το αντίστροφο.

ΣΠΟΥΔΑΙΑ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ: Αν $x, y \geq 0$, τότε $\sqrt{x \cdot y} \leq (x+y)/2$
$(x+y \geq 2\sqrt{x \cdot y} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0)$

Για κάθε k έχουμε $\sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} \leq (a_k + a_{k+1})/2$ (*)'

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ συγκλίνει. Πράγματι, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Από την υπόθεση λοιπόν και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{s=2}^{\infty} a_s$ συγκλίνει

Αναγκαία, ο γραμμικός συνδυασμός των

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2} a_{k+1}\right)$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{κριτήριο σύγκρισης}]{(*)'}$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}$ συγκλίνει

(*) Υποθέτουμε ότι $a_k \downarrow$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}$ συγκλίνει
Έχουμε $a_k \geq a_{k+1} \Rightarrow \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} \geq \sqrt{a_{k+1}^2} = a_{k+1}$

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ συγκλίνει,

δηλαδή η $\sum_{s=2}^{\infty} a_s$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} a_s$ συγκλίνει.

Παράδειγμα: Ορίζουμε $a_k = \begin{cases} 1/s, & \text{αν } k = 2s \\ 0, & \text{αν } k = 2s-1 \end{cases}$
(δηλαδή $0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, \ldots$)

Τότε $\forall k$ έχουμε $\sqrt{a_k \cdot a_{k+1}} = 0 \Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}$ συγκλίνει
Αλλά, αν $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, τότε
$S_{2n} = 0 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + \ldots + 0 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \to +\infty$
Άρα η $\sum a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$

(32) Έχουμε $a_k \geq 0$, η $\sum^{\infty} a_k$ συγκλίνει
ΝΔΟ: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Έχουμε $\frac{\sqrt{a_k}}{k} = \sqrt{a_k \cdot \frac{1}{k^2}} \leq \frac{1}{2} \cdot a_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2}$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει (υπόθεση) και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $\sum \left(\frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2} \frac{1}{k^2}\right)$ συγκλίνει και από κριτήριο σύγκρισης

η $\sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

ΣΩΣΤΟ Ή ΛΑΘΟΣ;

(1) Αν $a_k \to 0$ τότε η $S_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη.
ΛΑΘΟΣ. Για $a_k = \frac{1}{k} \to 0$ έχουμε $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to \infty$

(2) Αν η (S_n) είναι φραγμένη τότε η $\sum^{\infty} a_k$ συγκλίνει
ΛΑΘΟΣ. Αν $a_k = (-1)^{k-1}$ έχουμε $a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=1} a_k$ αποκλίνει
Όμως: $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + (-1) = 0$, $S_3 = S_2 + 1 = 1$, $S_4 = S_3 + (-1) = 0$, $\vdots$ $\Big\}$ (S_n) φραγμένη

(3) Αν $|a_k| \to 0$ τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως
ΛΑΘΟΣ. Αν $a_k = \frac{1}{k}$ τότε $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$, αλλά η $\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει

(4) Αν $\sum |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum a_k$ συγκλίνει
ΣΩΣΤΟ (Θεωρία)

(5) Αν $a_k > 0$ και $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε k, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει
ΛΑΘΟΣ. Για $a_k = \frac{1}{k}$ και $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$0 < \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1 \text{ δηλαδή ισχύει } \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

Όμως η $\sum a_k = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει

⑥ Αν $a_k > 0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ τότε η $\begin{cases} \sum a_k \text{ αποκλίνει} \to \text{ΛΑΘΟΣ} \\ \sum a_k \text{ συγκλίνει} \to \text{ΛΑΘΟΣ} \end{cases}$

- $a_k = \frac{1}{k}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ όμως η $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.
- $a_k = \frac{1}{k^2}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$. Όμως η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

<u>Κριτήριο Dirichlet</u>: Έστω (a_k), (β_k) δύο ακολουθίες:
- Η $S_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη.
- Ισχύει $\beta_k \downarrow 0$.

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \beta_k$ συγκλίνει

<u>Κριτήριο Leibniz</u>: Αν $\beta_k \downarrow 0$ (φθίνει στο 0), τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \beta_k$ συγκλίνει.

(Αυτό ισχύει γιατί η $a_k = (-1)^{k-1}$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα)

<u>Π.χ.</u> $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$ συγκλίνουν

⑦ Αν $a_k > 0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.
<u>ΣΩΣΤΟ</u>:
Αφού $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$ $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0 : a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_k \not\to 0$ (Οι όροι της είναι τελικά μεγαλύτ. από τον a_{k_0}).

⑧ Αν $a_k \to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ συγκλίνει.
<u>ΛΑΘΟΣ</u>: Αν $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ τότε $a_k \to 0$, αλλά η

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ αποκλίνει}$$

(9) Αν $a_k > 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.
ΛΑΘΟΣ:
Αν $a_k = \frac{1}{k^2}$ τότε η $\sum a_k = \sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Όμως η $\sum \sqrt{a_k} = \sum \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει

(10) Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum a_k^2$ συγκλίνει
ΛΑΘΟΣ: Γιατί για την $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ έχουμε $\sum a_k = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0\right)$ αλλά η $\sum a_k^2 = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(23) Συγκλίνει ή Αποκλίνει;

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$ | Αν $\beta_k = \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\frac{a_k}{\beta_k} = \frac{k+\sqrt{k}/2k^3-1}{1/k^2} =$

$$= \frac{k^3 + k^2 \cdot \sqrt{k}}{2k^3-1} = \frac{1 + 1/\sqrt{k}}{2 - 1/k^3} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$$

Άρα οι $\sum a_k$, $\sum \beta_k$ έχουν την ίδια συμπεριφορά
Αφού η $\sum \beta_k = \sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει έχουμε ότι η $\sum a_k$ συγκλίνει.

(22)(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt[k]{k}-1)^k}_{a_k}$ | Έστω $a_k > 0$. Εφαρμόζω Κριτήριο Ρίζας
$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{(\sqrt[k]{k}-1)^k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 1-1=0$
Άρα η $\sum a_k$ συγκλίνει

Για την $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$ έχουμε $a_k = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0$

• Αν $k \geq 3$ τότε $k \geq 3 > e > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ (γιατί $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \uparrow e$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[k]{k} > \sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = 1 + \frac{1}{k} \Rightarrow a_k = \sqrt[k]{k} - 1 > \frac{1}{k}$

Αφού η $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει έχουμε ότι η $\sum_{k=3}^{\infty}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$ αποκλίνει.

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$ | Έχουμε ότι $0 \le \frac{\cos^2 k}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$ γιατί $|\cos k| \le 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2 k \le 1$

Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum \frac{\cos^2 k}{k^2}$ συγκλίνει

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ | $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!\,k^k}{(k+1)^{k+1} \cdot k!} = \frac{k!\,\cancel{(k+1)} \cdot k^k}{(k+1)^k \cdot \cancel{(k+1)} \cdot \cancel{k!}} =$

$$= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = 1 / \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to 1/e < 1$$

Άρα από το Κριτήριο λόγου, η $\sum a_k$ συγκλίνει.

(24) (δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$

Εδώ $\beta_k = 1 + \frac{1}{k} > 1$ αλλά $\beta_k \to 1$.

Παρατηρούμε ότι: $a_k = \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k \cdot k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k \sqrt[k]{k}}$.

Θεωρώ την $\beta_k = \frac{1}{k}$.

Έχουμε $\frac{a_k}{\beta_k} = \frac{\frac{1}{k\sqrt[k]{k}}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum \frac{1}{k}$,

δηλαδή αποκλίνει.