Μάθημα 6

Σειρές πραγματικών αριθμών

Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Θέλουμε να "προσθέσουμε τους a_k".
Ορίζουμε μια νέα ακολουθία, την (s_n), ως εξής

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

(το άθροισμα των πρώτων n-όρων της (a_k))

Αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Τότε ο s είναι "το άθροισμα της a_k".

Ορολογία

1. Το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ λέγεται "η σειρά των a_k"

(αυστηρός ορισμός: η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η ακολουθία (s_n))

2. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$.

Τότε, γράφουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και λέμε ότι ο s είναι το άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. Αν $s_n \to +\infty$ τότε λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Αν $s_n \to -\infty$ τότε λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $-\infty$.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

4. Ο $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Παραδείγματα

(i) $a_k = 1$ / $s_n = 1+1+\ldots+1 = n \longrightarrow +\infty$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$.

(ii) $a_k = (-1)^{k+1}$ / $s_1 = 1$
$s_2 = 0$
$s_3 = 1$

Δηλαδή $s_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n: \text{περιττός} \\ 0, & \text{αν } n: \text{άρτιος} \end{cases} \longrightarrow$ δεν συγκλίνει.

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ αποκλίνει.

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$

$a_k = x^k$, $k > 0$, $a_0 = 1$ / $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} =$
$1, x, x^2, \ldots$ $= \dfrac{1-x^n}{1-x}$, αν $x \neq 1$

και $s_n = 1+1+1+\ldots+1 = n$ αν $x = 1$.

Συγκλίνει η (s_n); Εξαρτάται από το x.
(βασικό, αν $|x|<1$ τότε $x^n \to 0$)

- $|x| < 1$ / $s_n = \dfrac{1-x^n}{1-x} \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$, $x^n \to 0$

Άρα
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ αν $|x|<1$. Το ίδιο ισχύει αν $x>1$ ή αν $x \leq -1$.

Αν $x=1$ τότε $S_n = n \to +\infty$. Η σειρά αποκλίνει.

Ειδικές περιπτώσεις:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \quad , \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

iv) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

Γράφουμε $$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\left[\text{αφού} \quad a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Άρα, $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ / $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \to +\infty$ (θα δειχτεί)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ / $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ (θα δείξουμε την ύπαρξη ορίου για την (S_n) αλλά δεν θα βρούμε την τιμή του)

Απόδειξη για την σύγκλιση της (s_n)

(1) Η (s_n) είναι αύξουσα. $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^2} > s_n$

(2) Η (s_n) είναι άνω φραγμένη;

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$\underset{\text{υπολογιστεί}}{\overset{\text{έχει}}{=\!=}} 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} \\ \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2\cdot 3} \\ \vdots \end{array} \right)$$

Τώρα ξέρω ότι υπάρχει $s \leq 2$ ώστε $s_n \to s$.

Άρα $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Πρόταση 1

Έστω (a_k) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$.

Απόδειξη

Η τεχνική: Αν $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ τότε $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$

$\Rightarrow \quad s_n - s_{n-1} \longrightarrow s - s = 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει το άθροισμα της σειράς $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{m \to \infty} s_m$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m > n_0$ ισχύει:

$$|s - s_m| < \varepsilon/2 \quad (*)$$

Έστω $\boxed{n \geq n_0' = n_0+1}$. Τότε $n > n_0$ και $n-1 \geq n_0$

Άρα, μπορούμε να βάλουμε $m=n$ και $m=n-1$ στην (*).

Δηλ. έχουμε:

$$|s-s_n|<\varepsilon/2 \quad \text{και} \quad |s-s_{n-1}|<\varepsilon/2$$

Οπότε $\forall n \geq n_0'$ έχουμε:

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |(s_n-s)+(s-s_{n-1})| \leq$$
$$\leq |s_n-s|+|s-s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Άρα $a_n \to 0$.

Παρατήρηση

α) Η πρόταση 1 χρησιμοποιείται σαν κριτήριο απόκλισης:

Αν $a_k \not\to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, $a_k=1 \not\to 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$, $a_k=(-1)^{k+1} \not\to 0$)

β) Το αντίστροφο στην πρόταση 1 δεν ισχύει. Μπορώ να έχω $a_k \to 0$ και την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να αποκλίνει.

Παράδειγμα

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$$

Όμως $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} =$

$= \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$

Δηλαδή $s_n \to +\infty$ (η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει στο $+\infty$ παρόλο πού $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$)

Πρόταση 2 (κριτήριο Cauchy)

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m > n \geq n_0$.
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Τότε "Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει" $\overset{ορισ.}{\Longleftrightarrow}$ "Η (S_n) είναι συγκλίνουσα"

κεφ 1
$\Longleftrightarrow$ "Η (S_n) είναι βασική" $\overset{ορσ.}{\Longleftrightarrow}$

"Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m > n \geq n_0$ ισχύει $|S_m - S_n| < \varepsilon$." $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ "Για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall m > n \geq n_0$ $|a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$"

$$\left(S_m - S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (a_1 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + \ldots + a_m \right)$$

Παράδειγμα (εφαρμογή του κριτηρίου Cauchy)

Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Θα δείξουμε αργότερα:

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n - \gamma_n$ όπου $\gamma_n \to \gamma \in (0,1)$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι η $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική ακολουθία. Τότε, η (s_n) δεν συγκλίνει και μάλιστα $s_n \to +\infty$ αφού είναι αύξουσα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε:

$$s_{2n} - s_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-όροι}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο:
έστω ότι η (s_n) είναι βασική.
Για $\varepsilon = 1/8$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq n_0$ $|s_m - s_n| < \frac{1}{8}$
Τότε, αν $n \geq n_0$ έχουμε και $2n > n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq |s_{2n} - s_n| < \frac{1}{8}$ ΑΤΟΠΟ.

Γενικές παρατηρήσεις

1) Δίνοντας δύο ακολουθίες (a_k), (b_k) και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την $\gamma_k = \lambda a_k + \mu b_k$.

Αν οι $\sum a_k$, $\sum b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η $\sum \gamma_k$ και (*) $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) =$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Απόδειξη

Ορίζουμε, $s_n = a_1 + \dots + a_n \xrightarrow{\text{Υποθ.}} s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$t_n = b_1 + \dots + b_n \xrightarrow{\text{Υποθ.}} t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Θεωρούμε το n-οστό μερικό άθροισμα:

$$u_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n =$$
$$= (\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) =$$
$$= (\lambda a_1 + \dots + \lambda a_n) + (\mu b_1 + \dots + \mu b_n) =$$
$$= \lambda \cdot (a_1 + \dots + a_n) + \mu (b_1 + \dots + b_n) =$$
$$= \lambda s_n + \mu t_n \longrightarrow \lambda s + \mu t$$

Με βάση τον ορισμό, $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(\lambda a_k + \mu b_k)}_{\gamma_k} \overset{}{\underset{\text{ορ.}}{=}} \lim_{n\to\infty} u_n =$

$$= \lambda s + \mu t = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Έχω την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και την $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ (για κάποιον $m>1$)

Ισχυρισμός: Η πρώτη συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ η δεύτερη συγκλίνει και τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$

Απόδειξη ($\Leftarrow$)

Θέτω $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$t_n = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+n-1}$

Ξέρω ότι $t_n \to t \in \mathbb{R}$

Παίρνω $n > m$ και γράφω $s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + a_m + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + t_{n-m+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + t$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim s_n = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + t = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \lim t_n = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$