# Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
## Μάθημα 32ο (07-07-2014)

## Επαναληπτικές ασκήσεις

Φ.5.5 Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $h$ συνεχής, $f$ παραγωγίσιμη.
Ορίζουμε $F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)\,dt$, $x \geq 0$.
Παραγωγίστε την $F$.

**Λύση**

Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα
$$G(x) = \int_0^x h(t)dt$$
Ξέρουμε ότι $G' = h$.
Τότε $F(x) = G(f(x)) \Rightarrow F'(x) = G'(f(x))\cdot f'(x) = h(f(x))\cdot f'(x)$. □

Ε40 Αν $G(x) = \int_0^x e^t \cdot \cos(x-t)\,dt$, υπολογίστε την $G'$.

**Λύση**

$x - t = u \Rightarrow t = x - u$

$t = 0 \Rightarrow u = x$

$t = x \Rightarrow u = 0$

$dt = -du$

Άρα, έχουμε: $G(x) = -\int_x^0 e^{x-u}\cos u\,du = \int_0^x e^x e^{-u}\cos u\,du =$

$$= e^x \int_0^x e^{-u}\cos u\,du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(x) = e^x \int_0^x e^{-u}\cos u\,du + e^x e^{-x}\cos x =$$

$$= e^x \int_0^x e^{-u}\cos u\,du + \cos x.$$

Άλλος τρόπος:

$$G(x) = \int_0^x e^t(\cos x \cdot \cos t + \sin x \cdot \sin t)dt =$$

$$= \cos x \int_0^x e^x \cos t\, dt + \sin x \int_0^x e^t \sin t\, dt$$ και παραγωγίζουμε □

$\boxed{50}$ Έστω $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
Αν υπάρχει το $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Λύση

"Υπάρχει": $M \overset{f>0}{\underset{\Downarrow}{\longmapsto}} \int_0^M f(x)\,dx$ αύξουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists A>0: \forall M>0 \ \int_0^M f(x)dx \le A$

Έστω ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x_n \to +\infty$, ώστε $f(x_n) \ge \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon>0$.
Μάλιστα, μπορώ να υποθέσω ότι $x_{n+1} > x_n + 1 \ \forall n$.
Αφού η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\exists \delta>0$: "αν $y, z \in [0,\infty)$ και $|y-z|<\delta$, τότε $|f(y)-f(z)| < \varepsilon/2$".
Αν $|y-x_1|<\delta$, τότε $|f(y)-f(x_1)| < \varepsilon/2 \Rightarrow f(y) \ge f(x_1) - \varepsilon/2 \ge$
$\ge \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$

Όμοια, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall y\in(x_n-\delta, x_n+\delta)$ έχουμε $f(y) \ge \varepsilon/2$.
Αφού $x_{n+1}-x_n > 1$ και $\delta < 1/2$, τα διαστήματα $(x_n-\delta, x_n+\delta)$ δεν επικαλύπτονται.
Τότε: $A \ge \int_0^{x_n+\delta} f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \underbrace{f(x)}_{\ge \varepsilon/2}dx \ge \sum_{k=1}^{n} \cancel{2}\delta \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = n\delta\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow n \le \frac{A}{\delta\varepsilon}$, άτοπο. □

**51** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)=f(b)=0$

Επίσης, η $f'$ είναι συνεχής και $\int_a^b f^2(x)\,dx = 1$

Δείξτε ότι: (1) $\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$.

(2) $\left(\int_a^b x^2 f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b (f'(x))^2\,dx\right) \geq \frac{1}{4}$

Λύση

(1) $\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = \int_a^b x\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' dx = \cancel{\frac{x f^2(x)}{2}\Big|_a^b}^{\,0} - \int_a^b \frac{f^2(x)}{2}\,dx = -\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \left(\int_a^b x^2 f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b (f'(x))^2\,dx\right)$. $\square$

**55** $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f'$ συνεχής

Δείξτε ότι: (a) $\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n f(x) e^{-nx}\,dx}_{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$.

(b) $\underbrace{\int_0^1 n f(x) e^{-nx}\,dx}_{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$.

Λύση

(b) $\int_0^1 f(x)(-e^{-nx})'\,dx = -f(x)e^{-nx}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-nx} f'(x)\,dx =$

$= f(0) - \underbrace{f(1)e^{-n}}_{\downarrow\, 0} + \int_0^1 e^{-nx} f'(x)\,dx$

$f'$ συνεχής $\Rightarrow \exists M>0 : \forall x \ |f'(x)| \leq M$

Γράφουμε: $\left|\int_0^1 e^{-nx} f'(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 e^{-nx}|f'(x)|\,dx \leq M\int_0^1 e^{-nx}\,dx = M\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\Big|_0^1\right) =$

$= M\frac{1-e^{-nx}}{n} \to 0$

Άρα $\int_0^1 n f(x) e^{-nx}\,dx \longrightarrow f(0)$.

(a) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n f(x) e^{-nx}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f(x)(-e^{-nx})'\,dx = -f(x)e^{-nx}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f'(x) e^{-nx}\,dx =$

$= \frac{-f(\frac{1}{\sqrt{n}})}{e^{n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}} + f(0) + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f'(x) e^{-nx}\,dx$

$f$ συνεχής $\Rightarrow |f| \leq A$

$f'$ συνεχής $\Rightarrow |f'| \leq B$

- $\left| \dfrac{f(\frac{1}{\sqrt{n}})}{e^{\sqrt{n}}} \right| \leq \dfrac{A}{e^{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$
- $\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f'(x) e^{-nx} dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} |f'(x)| e^{-nx} dx \leq B \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$ □

**56** $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ φραγμένη και η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι $R=1$.

Λύση

$R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Ξέρουμε ότι $\exists A>0: \ |a_k| \leq A \Rightarrow \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq \lim \sqrt[k]{A} = 1$.

Άρα $R \geq \frac{1}{1} = 1$.

Έστω ότι $R>1$

Τότε, $\forall |x|<R$, έχουμε $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ για $x=1$ η $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο

□

**57** $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη $\Rightarrow R=1$ (η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).

Λύση

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 1^k$ συγκλίνει
- $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$.

$a_k \to 0 \Rightarrow (a_k)$ φραγμένη $\Rightarrow \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq 1 \overset{(56)}{\Longrightarrow} R \geq 1$ (αλλιώς: αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=1$, έχουμε $R \geq 1$).

Αν είχαμε ότι $R>1$ θα είχαμε (όπως στην 56) ότι $|x|<R \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum |a_n||x|^n < \infty$ και για $x=1$, $\sum |a_n| < \infty$, άτοπο. $\square$

58] $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=f(1)=0$.
Αν $|f''(x)|\le M$ $\forall x\in(0,1)$, δείξτε ότι $|f'(x)|\le \frac{M}{2}$ $\forall x\in[0,1]$.

Λύση
Έστω $x\in[0,1]$
Για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi_{x,t})}{2}(t-x)^2$ $\exists \xi_{x,t}$ ανάμεσα στα $x,t$:

$$f(0)=f(x)-f'(x)\cdot x+\frac{f''(\xi_{x,0})}{2}x^2$$
$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_{x,1})}{2}(1-x)^2.$$

Αφαιρώντας την 1η από την 2η έχουμε:

$$0=f'(x)+\frac{f''(\xi_{x,1})}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_{x,0})}{2}x^2 \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow |f'(x)|\le\frac{(1-x)^2|f''(\xi_{x,1})|+x^2|f''(\xi_{x,0})|}{2}\le M\,\frac{x^2+(1-x)^2}{2}\le M\frac{1}{2},$$ αφού
$\max\limits_{x\in[0,1]}\left(x^2+(1-x)^2\right)=1$. $\square$

59] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη.
Αν $M_0=\sup\limits_x|f(x)|$, $M_1=\sup\limits_x|f'(x)|$, $M_2=\sup\limits_x|f''(x)|$,
δείξτε ότι $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

Λύση
Έστω $x\in\mathbb{R}$.
Θέλω να φράξω το $|f'(x)|$.
Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\xi_{x,t}$ ανάμεσα στα $x,t$, ώστε:

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi_{x,t})}{2}(t-x)^2 \Longrightarrow$$

$$\overset{t\neq x}{\Longrightarrow} f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-\frac{f''(\xi_{x,t})}{2}(t-x)\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |f'(x)|\le\frac{|f(t)|+|f(x)|}{|t-x|}+\frac{|f''(\xi_{x,t})|}{2}|t-x|\le\frac{2M_0}{|t-x|}+\frac{M_2}{2}|t-x| \quad \forall t\neq x \overset{?}{\Rightarrow}$$

$\overset{|t-x|=a}{\Rightarrow} \forall a>0 \quad |f'(x)| \le \underbrace{\frac{2M_0}{a} + \frac{M_2}{2}a}_{\min = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}$

Για $a = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ :

$$|f'(x)| \le \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{M_2}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} = \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{M_0M_2} \quad \square$$

$\boxed{\Phi.77}$ Αν $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, να βρεθεί το $T_{n,f,0}$.

Λύση

α' τρόπος: $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

β' τρόπος: Ψάχνω πολυώνυμο $p_n(x)$ $(\deg(p_n)\le n)$ : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-p_n(x)}{x^n} = 0$

Τότε $T_{n,f,0} \equiv p_n$.

Έχουμε $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, $t\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$.

Σταθεροποιούμε $n$ και θεωρούμε το:

$$p_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

και το:

$$q_{2n+1}(x) = \int_0^x p_{2n}(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$$

Θα δείξουμε ότι $T_{2n+1,f,0}$

$$|f(x) - q_{2n+1}(x)| = \left|\int_0^x e^{-t^2}dt - \int_0^x p_{2n}(t)dt\right| \quad (*)$$

Φράσσω το $|e^{-t^2} - p_{2n}(t)|$

$$\left|e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| = \left|\frac{e^{\xi_t} t^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e^{|t|}}{(n+1)!}|t|^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|e^{-x^2} - p_{2n}(x)\right| \le \frac{e^{|x|^2}}{(n+1)!}|x|^{2n+2}$$

Άρα $\left|e^{-t^2} - p_{2n}(t)\right| \le \frac{e^{t^2}}{(n+1)!}|t|^{2n+2} \le \frac{e^{|x|^2}|x|^{2n+2}}{(n+1)!} \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - q_{2n+1}(x)| \le \frac{e^{|x|^2}}{(n+1)!}|x|^{2n+3}$

Άρα, $\left|\frac{f(x) - q_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}\right| \le \frac{e^{|x|^2}|x|^2}{(n+1)!} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$ $\square$