Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 29ο (30-06-2014)

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Με $\int f(x)dx$ συμβολίζουμε κάθε παράγουσα F της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με $F' = f$.

I Πίνακας βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, $a \neq -1$ (διότι $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{(a+1)x^a}{a+1}$)

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(3) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

(6) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

(7) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

(9) $\int e^x dx = e^x + c$

II $\int \overbrace{\frac{P(x)}{Q(x)}}^{\text{ρητή συνάρτηση}} dx$, όπου P, Q είναι πολυώνυμα του x, δηλαδή,

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$,

$Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$,

$m, n \geq 0$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$

Βήμα 1: Αν $\deg(P) \geq \deg(Q)$ κάνοντας διαίρεση βρίσκουμε πολυώνυμα $\pi(x)$, $\upsilon(x)$ με $\boxed{\deg(\upsilon) < \deg(Q)}$ και

$P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\int \pi(x) dx}_{\text{απλό}} + \underbrace{\int \frac{\upsilon(x)}{Q(x)} dx}_{\text{Θέλουμε αυτό, αλλά τώρα } \deg(\upsilon) < \deg(Q)}$$

Βήμα 2: Αναγόμαστε από το 1 στο $\int \frac{P}{Q}$, όπου $\deg(P)<\deg(Q)$

Το Q γράφεται στη μορφή

$$Q(x)=a(x-\rho_1)^{s_1}\cdots(x-\rho_k)^{s_k}\underbrace{(x^2+\lambda_1 x+\mu_1)^{t_1}\cdots(x^2+\lambda_r x+\mu_r)^{t_r}},$$

$s_1+\dots+s_k+2t_1+\dots+2t_r=m$, $\quad s_i\geq 1$, $t_j\geq 1$

• Αρνητική διακρίνουσα
• Δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Βήμα 3: Υπάρχουν A_{ij}, B_{ij}, Γ_{ij} τέτοια ώστε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{P(x)}{(x-\rho_1)^{s_1}\cdots(x-\rho_k)^{s_k}(x^2+\lambda_1x+\mu_1)^{t_1}\cdots(x^2+\lambda_r x+\mu_r)^{t_r}}=$$

$$=\frac{A_{11}}{x-\rho_1}+\frac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2}+\dots+\frac{A_{1s_1}}{(x-\rho_1)^{s_1}}+$$

$$+\frac{A_{21}}{x-\rho_2}+\frac{A_{22}}{(x-\rho_2)^2}+\dots+\frac{A_{2s_2}}{(x-\rho_2)^{s_2}}+\dots+\frac{A_{k1}}{x-\rho_k}+\dots+\frac{A_{ks_k}}{(x-\rho_k)^{s_k}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{(x^2+\lambda_1x+\mu_1)}+\frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\lambda_1x+\mu_1)^2}+\dots+\frac{B_{1t_1}x+\Gamma_{1t_1}}{(x^2+\lambda_1x+\mu_1)^{t_1}}+\dots+$$

$$+\frac{B_{r1}x+\Gamma_{r1}}{(x^2+\lambda_rx+\mu_r)}+\dots+\frac{B_{rt_r}x+\Gamma_{rt_r}}{(x^2+\lambda_rx+\mu_r)^{t_r}},\quad \forall x.$$

Τα κεφαλαία A_{ij}, B_{ij}, Γ_{ij} τα βρίσκουμε κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και λύνοντας $m\times m$ σύστημα

Βήμα 4: Αφού βρούμε τις σταθερές A_{ij}, B_{ij}, Γ_{ij} μένει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα μιας από τις παρακάτω μορφές:

- $\int \frac{A}{x-\rho}\,dx = A\ln|x-\rho|+c$.
- $\int \frac{A}{(x-\rho)^s}\,dx = A\int (x-\rho)^{-s}\,dx = \frac{A}{-s+1}(x-\rho)^{-s+1}+c$. $\quad \boxed{s>1}$
- $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\lambda x+\mu)^t}\,dx$ $\quad \boxed{\lambda^2<4\mu}$

Γράφουμε $Bx+\Gamma=\frac{B}{2}(2x+\lambda)+\left(\Gamma-\frac{B\lambda}{2}\right)$

$(x^2+\lambda x+\mu)'=2x+\lambda$

Τότε $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\lambda x+\mu)^t}\,dx=\frac{B}{2}\underbrace{\int\frac{2x+\lambda}{(x^2+\lambda x+\mu)^t}\,dx}_{1}+\left(\Gamma-\frac{B\lambda}{2}\right)\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+\lambda x+\mu)^t}\,dx}_{2}$

Το 1 αν θέσουμε $y=x^2+\lambda x+\mu$

$\Rightarrow dy=(2x+\lambda)dx$

γίνεται $\int \frac{dy}{y^t} = \frac{y^{-t+1}}{-t+1} = \frac{(x^2+\lambda x+\mu)^{-t+1}}{-t+1}$

Για το ② γράφουμε $x^2+\lambda x+\mu = \left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{4\mu-\lambda^2}{4} =$

$$= \frac{4\mu-\lambda^2}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\frac{4\mu-\lambda^2}{4}}}\right)^2+1\right]$$

Άρα ζητάμε το $\left(\frac{4}{4\mu-\lambda^2}\right)^t \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\lambda/2}{\sqrt{\frac{4\mu-\lambda^2}{4}}}\right)^2+1\right]^t}dx = \sqrt{\frac{4\mu-\lambda^2}{4}}\left(\frac{4}{4\mu-\lambda^2}\right)^t\int\frac{1}{(z^2+1)^t}dz$.

z, $dz = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\mu-\lambda^2}{4}}}dx$

Φαίνεται, λοιπόν, να ξέρω να υπολογίζω το
$I_k = \int\frac{1}{(x^2+1)^k}dx$ για $k=1,2,3,4,\dots$
Ξέρουμε ότι $I_1 = \int\frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c$.

Άσκ. 4 Έστω $I_n = \int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$, $n=1,2,\dots$
Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

Λύση

$$I_n = \int (x)'\frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int x\left(-\frac{n\,2x}{(x^2+1)^{n+1}}\right)dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx - \int\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n\,I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n. \quad \square$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$$

$$I_2 \overset{n=1}{=\!=} \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

$$I_3 \overset{n=2}{=\!=} \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\right) + c$$

Παραδείγματα

(1) $\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

a: ✓

b: $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$

$$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx.$$

Υπάρχουν A, B, Γ:

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x)(x+2) + \Gamma(x-1)x}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B+\Gamma)x^2 + (A+2B-\Gamma)x - 2A}{x(x-1)(x+2)}$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} A+B+\Gamma &= 3 \\ A+2B-\Gamma &= 0 \\ -2A &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\boxed{A=-3} \\ &\boxed{B=3} \\ &\boxed{\Gamma=3} \end{aligned}$$

Άρα, $\int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx =$

$$= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c =$$

$$= 3\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right| + c.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$

$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = \ldots = (x-1)(x^2+1)^2$.

Άρα $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$.

Υπάρχουν A, B, Γ, Δ, E ώστε: $\displaystyle\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} + \frac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$.

$A(x^2+1)^2 + (Bx+\Gamma)(x-1)(x^2+1) + (\Delta x+E)(x-1) = x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x^4+2x^2+1) + (Bx^4+\Gamma x^3 - Bx^3 - \Gamma x^2 + Bx^2 + \Gamma x - Bx - \Gamma) + (\Delta x^2 + Ex - \Delta x - E) = x+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \Gamma-B=0 \\ 2A-\Gamma+B+\Delta=0 \\ \Gamma-B+E-\Delta=1 \\ A-\Gamma-E=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{A=\frac{1}{2}} \\ \boxed{B=\Gamma=-\frac{1}{2}} \\ \boxed{\Delta=-1} \\ \boxed{E=0} \end{array}$$

Άρα, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \left(\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2(x^2+1)} + c.$$