Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 28ο (27-06-2014)

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $\exists f^{(n)}(x_0)$ (→ διάστημα)

(1) Πολυώνυμο Taylor: $T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\le n$ που ικανοποιεί την $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

(2) Ορίζουμε το υπόλοιπο: $R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x)$.

Θεώρημα (μορφές υπολοίπου): Αν υπάρχει η $f^{(n+1)}$ (και είναι ολοκληρώσιμη), τότε $\forall x \in I$ $\exists \xi$ στο x_0, x ή x, x_0 ώστε:

(i) $R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$

(ii) $R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

(iii) $R_{n,f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$

(3) Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

- Για κάθε n και για κάθε $x \in I$, ισχύει:
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$
- Τα $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ είναι τα μερικά αθροίσματα της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.
- Αν για κάποιο x ισχύει
$$R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
→ Εδώ γράφουμε το $|R_n(x)| \le \gamma_n \to 0$

τότε, έχουμε (ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για το x και)
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Παραδείγματα

(a) $f(x) = e^x$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$.

(b) $f(x) = \text{συν}x$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \text{συν}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

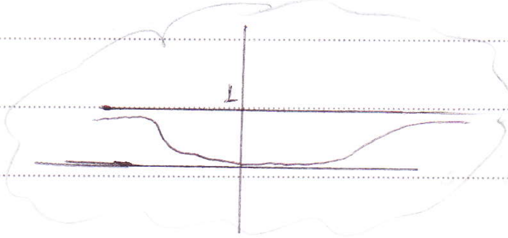
(c) $f(x)=\eta\mu x,\quad I=\mathbb{R},\quad x_0=0$

$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \eta\mu x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$

(d) $f(x)=\ln(1+x),\quad I=(-1,+\infty),\quad x_0=0$

$\forall x\in(-1,1]\qquad \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$

(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad x\neq 0$

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}}\overset{DLH}{=}0$ και όμοια $f'_-(0)=0$.

$f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, όπου $P(y)=-6y^4+4y^6$, $x\neq 0$.

$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)^4}{e^{1/x^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{2y^4}{e^{y^2}}=0.$

Ασκ. 8 Αυτή η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\forall k=0,1,2,\dots\quad f^{(k)}(0)=0$ (με επαγωγή).

Έχουμε $T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\equiv 0$

Άρα, $R_{n,f,0}(x)=f(x)-T_{n,f,0}(x)=f(x)\ \not\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ 0$ $\square$

(Το (e) και η Ασκ. 8 είναι "αντιπαράδειγμα" για κ.δ.ο. δεν μπορείς κάθε συνάρτηση να την γράψεις ως δυναμοσειρά)

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ και έστω ότι $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\quad\forall x\in(-R,R)$

Τότε, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-R,R)$ και

(1) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

(2) $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

$\vdots$

(k) $f^{(k)}(x)=\sum_{n=}^{\infty}n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_nx^{n-k}$

$\vdots$

και (I) $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\quad\forall x\in(-R,R).$

Απόδειξη

Δείχνουμε την (1): η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ είναι $R_1 := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, διότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ (χρησιμοποιούμε το: αν $b_n, \gamma_n > 0$ και $b_n \to b > 0$ τότε $\limsup (b_n \gamma_n) = b \cdot \limsup \gamma_n$).

Γράφουμε: $\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}{t} =$

[για κάποιο $x \in (-R,R)$ και για $|t| < \delta$, οπότε $|x+t| \leq |x| + |t| < |x| + \delta < R$]

$$= \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \Big(\overset{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}t^k}{\overbrace{(x+t)^n}} - x^n - n t x^{n-1} \Big) = \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{n=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k .$$

Γράφουμε: $\left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \underbrace{t^k}_{t^2 \cdot t^{k-2}} \right| = t^2 \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \right| \leq$

$$\leq t^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |t|^{k-2} \underset{|t|<\delta}{\leq} t^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} =$$

$$= \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k = \frac{t^2}{\delta^2} (|x|+\delta)^n .$$

Άρα, $\left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \leq \frac{1}{\cancel{t}} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{t^{\cancel{2}}}{\delta^2} (|x|+\delta)^n \leq$

$$\leq \frac{t}{\delta^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x|+\delta)^n}_{A(x,\delta) < \infty} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 .$$

(οι δυναμοσειρές συγκλίνουν ΑΠΟΛΥΤΟΣ στο ανοιχτό διάστημα σύγκλισής τους)

Η $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης R, και το ίδιο ισχύει για την $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, οπότε κάνοντας τα ίδια έχουμε $f''(x) = g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ στο $(-R,R)$. κ.ο.κ.

Για το ολοκλήρωμα: η $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{F(x)}$ έχει, επίσης, ακτίνα σύγκλισης R.

Από το προηγούμενο, $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (n+1) x^n = f(x)$ στο $(-R,R)$

Άρα, ειδικότερα, η F' είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. ως συνεχής) στο $[0, x]$ $\forall x \in (-R, R)$.

Άρα, $\underbrace{F(x) - \cancel{F(0)}^{0}}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}} = \int_0^x F'(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ ■

Παρατήρηση

Αφού $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \longrightarrow f'(0) = a_1$

$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \longrightarrow f''(0) = 2a_2$

και γενικά $f^{(\kappa)}(0) = \kappa! \, a_\kappa$

Πόρισμα 1

Αν η $f: (-R, R) \to \mathbb{R}$ γράφεται σαν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, τότε

$a_\kappa = \frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Πόρισμα 2 (μοναδικότητα)

Αν η $f: (-R, R) \to \mathbb{R}$ γράφεται ως

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, στο $(-R, R)$

τότε: $a_n = b_n$ $\forall n$.

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{array}\right\} a_n = b_n.$$ ■

Από το πόρισμα!