Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 26ο (23-06-2014)

Θεώρημα Taylor

• Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0:

$$\exists f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}{x-x_0}=0.$$

Η $T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ είναι γραμμική ($T_1(x)=a+b(x-x_0)$) με την ιδιότητα: $T_1(x_0)=f(x_0)$, $T_1'(x)=f'(x_0) \rightsquigarrow T_1'(x_0)=f'(x_0)$.

Η T_1 είναι η "βέλτιστη γραμμική προσέγγιση" της f "κοντά" στο x_0.

• Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

Ζητάμε πολυώνυμο $T_2(x)=a+b(x-x_0)+\gamma(x-x_0)^2$ το οποίο να προσεγγίζει καλά την f κοντά στο x_0.

Ιδέα: Ζητάμε: (1) $T_2(x_0)=f(x_0) \rightsquigarrow \boxed{a=f(x_0)}$

(2) $T_2'(x_0)=f'(x_0)$

Όμως, $T_2'(x)=b+2\gamma(x-x_0)$, άρα θέλουμε $T_2'(x_0)=\boxed{b=f'(x_0)}$

(3) $T_2''(x_0)=f''(x_0)$

Όμως, $T_2''(x)=2\gamma$, άρα θέλουμε $2\gamma=f''(x_0) \rightsquigarrow \boxed{\gamma=\frac{f''(x_0)}{2}}$

Δηλαδή, $T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2}=0$, δηλαδή το T_2 προσεγγίζει καλύτερα από το T_1 την f κοντά στο x_0.

Ορισμός (πολυώνυμο Taylor)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι υπάρχει η $f^{(n)}(x_0)$ για κάποιο $x_0\in[a,b]$.

Το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για την συνάρτηση f στο σημείο x_0 είναι το:

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Θεώρημα

Με τον συμβολισμό του ορισμού, το T_{n,f,x_0} είναι το μοναδικό πολυώνυμο p_n βαθμού $\leq n$ με την ιδιότητα:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Απόδειξη (Επαγωγή στο n)

Για $n=1$ ζητάμε: $\underbrace{\frac{f(x) - \overbrace{(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}^{T_{1,f,x_0}(x)}}{x-x_0}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Επαγωγικό βήμα: ζητάμε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

(υποθέτω ότι ξέρω: $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - T_{n-1,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$ αν $\exists g^{(n-1)}(x_0)$)

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή "$\frac{0}{0}$":

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - T_{n,f,x_0}(x)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$
- $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^n = 0.$

$\boxed{T'_{n,f,x_0} \equiv T_{n-1,f',x_0}}$

Εφαρμόζουμε de l'Hospital:

Αριθμητής: $(f(x) - T_{n,f,x_0}(x))' = f'(x) - T_{n-1,f',x_0}(x)$.

Παρονομαστής: $((x-x_0)^n)' = n(x-x_0)^{n-1}$.

Πηλίκο: $\frac{1}{n} \frac{f'(x) - T_{n-1,f',x_0}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, από την επαγωγική υπόθεση για την $g = f'$. (...)

Παραδείγματα

(1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ (άπειρες φορές παραγωγίσιμη)

Χρειάζομαι
$$f(x) = e^x \rightsquigarrow e^0 = 1$$
$$f'(x) = e^x \rightsquigarrow 1$$
$$f''(x) = e^x \rightsquigarrow 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \rightsquigarrow 1$$

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(2) $f(x)=\eta\mu x \quad x_0=0$

$$f(x)=\eta\mu x \rightsquigarrow f(0)=\eta\mu 0=0$$
$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x \rightsquigarrow f'(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$$
$$f''(x)=-\eta\mu x \rightsquigarrow f''(0)=-\eta\mu 0=0$$
$$f^{(3)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x \rightsquigarrow f^{(3)}(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\eta\mu x \rightsquigarrow f^{(4)}(0)=\eta\mu 0=0$$
$$f^{(5)}(x)=\sigma\upsilon\nu x \rightsquigarrow f^{(5)}(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$T_{3,f,0}(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)\cdot x^2}{2}+\frac{f^{(3)}(0)\cdot x^3}{3!}=x-\frac{x^3}{3!}.$$
$$T_{9,f,0}=T_{10,f,0}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}.$$

(3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad x_0=0$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1} \longrightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow f'(0)=0$$
$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2+8x^3(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \longrightarrow f''(0)=-2$$
$$f^{(3)}(x)=\dots$$

Συνέχεια της απόδειξης (μοναδικότητα)

(...) Υποθέτουμε ότι p_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ με την ιδιότητα:

$$\circledast \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

Θα δείξουμε ότι: $p_n\equiv T_{n,f,x_0}$

(Ξέρουμε ότι το T_{n,f,x_0} ικανοποιεί την $\circledast$.)

Τότε, $\lim_{x\to x_0}\frac{T_{n,f,x_0}(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{T_{n,f,x_0}(x)-f(x)}{(x-x_0)^n}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}=0+0=0,$

οπότε θέτουμε $q_n=T_{n,f,x_0}-p_n$, το q_n είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$,

και ζητάμε: (Λήμμα) Αν $\deg(q_n)\leq n$ και $\lim_{x\to x_0}\frac{q_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$, για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε $q_n(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

(Απόδειξη) Έχουμε $q_n(x)=\frac{q_n(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n \xrightarrow[x\to x_0]{} 0\cdot 0=0 \Rightarrow q_n(x)=0.$

Άρα, υπάρχει πολυώνυμο q_{n-1}, βαθμού $\leq n-1$ ώστε: $q_n(x)=(x-x_0)q_{n-1}(x)$

Επίσης, έχουμε: $\frac{q_{n-1}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{q_{n-1}(x)(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{q_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

Με επαγωγή ως προς n έχουμε $q_{n-1}\equiv 0 \Rightarrow q_n \equiv 0$. ∎

Παραδείγματα (χρήση της μοναδικότητας)

(1) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x_0=0$

$f(x)=\frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \rightsquigarrow f'(0)=1$

$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \rightsquigarrow f''(0)=2$

$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4} \rightsquigarrow f^{(3)}(0)=3!$

$\vdots$

$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \rightsquigarrow f^{(k)}(0)=k!$

Άρα, $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!}x^k = 1+x+x^2+\dots+x^n$.

Άλλος τρόπος:

Ξέρουμε από το Κεφάλαιο 2 ότι $\forall x\in(-1,1)$ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Ορίζουμε $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Ισχυρίζομαι ότι $p_n \equiv T_{n,f,0}$ (*)

Ελέγχουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_n(x)}{x^n}=0$ και τότε (λόγω μοναδικότητας) έχουμε την (*).

Έχουμε $\frac{f(x)-p_n(x)}{x^n} = \frac{\frac{1}{1-x}-(1+x+\dots+x^n)}{x^n} = \frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x_0=0$

Για $x\in(-1,1)$ έχουμε:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^n x^{2n}+\dots$$

Ισχυρισμός: $T_{2n,f,0}(x)\equiv p_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_{2n}(x)}{x^{2n}}=0$.

Έχουμε: $\frac{f(x)-p_{2n}(x)}{x^{2n}} = \frac{\frac{1}{1+x^2}-\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k}{x^{2n}} = \frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}}{x^{2n}} =$

$$= \frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}}{x^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{\cancel{x^{2n}}(1+x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Μάλιστα, $\frac{f(x)-p_{2n}(x)}{x^{2n+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, άρα $p_{2n}\equiv T_{2n,f,0}\equiv T_{2n+1,f,0}$.