Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 25ο (20-06-2014)

Θεωρία

Ολοκλήρωση κατά μέρη (ή κατά παράγοντες)

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες και έστω ότι οι f', g' είναι ολοκληρώσιμες.

Τότε, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $\displaystyle\int_\alpha^x f'(t)g(t)\,dt = f(x)g(x)-f(\alpha)g(\alpha)-\int_\alpha^x f(t)g'(t)\,dt$

Ειδικότερα, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f'g = fg\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta fg'$.

Απόδειξη

$(f\cdot g)' = \underbrace{f'g+fg'}_{\text{ολοκληρώσιμη}}$

Αφού η παράγωγος της $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από το 2ο Θ.Θ. $\Rightarrow \displaystyle\int_\alpha^x (fg)' = fg\Big|_\alpha^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\alpha^x (f'g+fg') = f(x)g(x)-f(\alpha)g(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^x f'g+\int_\alpha^x fg' = f(x)g(x)-f(\alpha)g(\alpha). \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή: Το 2ο Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής και η g είναι μονότονη παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

Τότε, $\exists\xi\in[\alpha,\beta]: \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_\alpha^\xi f(x)\,dx+g(\beta)\int_\xi^\beta f(x)\,dx$

Θεωρούμε την $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(t)=\displaystyle\int_\alpha^t f(x)\,dx$.

Άρα, το ζητούμενο γράφεται: $\exists\xi\in[\alpha,\beta]: \displaystyle\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)\,dx = g(\alpha)F(\xi)+g(\beta)\big(F(\beta)-F(\xi)\big)$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)\,dx = F(\beta)g(\beta)-\cancelto{0}{F(\alpha)}g(\alpha)-\int_\alpha^\beta F(x)g'(x)\,dx$$

Ζητάμε: $\xi\in[\alpha,\beta]: F(\beta)g(\beta)-\displaystyle\int_\alpha^\beta F(x)g'(x)\,dx = g(\alpha)F(\xi)+g(\beta)F(\beta)-g(\beta)F(\xi)$.

Άρα, ζητάμε ξ: $\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)(g(\xi)-g(a)) = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx$.
Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του ολοκληρωτικού λογισμού για:
- την συνεχή F (η F είναι συνεχής)
- την g' η οποία είναι ολοκληρώσιμη (ως συνεχής) και διατηρεί πρόσημο (γιατί η g είναι μονότονη).

Επαναληπτικές Ασκήσεις

35 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, η f' είναι συνεχής, $\forall x\in[0,1]$ $0\leq f'(x)\leq 1$
Δείξτε ότι: $\int_0^1 (f(x))^3dx \leq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

Λύση
Θα δείξουμε ότι: $\forall y\in[0,1]$ $\int_0^y (f(x))^3dx \leq \left(\int_0^y f(x)dx\right)^2$.
Αν το δείξουμε, θέτουμε $y=1$ και παίρνουμε το ζητούμενο.
Θεωρούμε την $A(y) = \left(\int_0^y f(x)dx\right)^2 - \int_0^y (f(x))^3dx$.

(1) $A(0)=0$

(2) Υπολογίζουμε την $A'(y) = 2f(y)\int_0^y f(x)dx - (f(y))^3 = f(y)\left[2\int_0^y f(x)dx - (f(y))^2\right]$

Παρατήρηση: $f(y) = f(0) + \int_0^y f'(t)dt \geq 0$ $\forall 0<y\leq 1$.

Άρα, αρκεί να δείξω ότι $2\int_0^y f(x)dx - (f(y))^2 \geq 0$ $\forall y\in[0,1]$ και τότε θα έχω $A'(y)\geq 0$.

Ορίζουμε $B(y) = 2\int_0^y f(x)dx - (f(y))^2$.

$B(0)=0$ και $B'(y) = 2f(y) - 2f(y)f'(y) = 2f(y)(1-f'(y)) \geq 0$

Άρα, $\left.\begin{matrix} B(y)\geq 0 \ \forall y \Rightarrow A'(y)\geq 0 \ \forall y \\ A(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(y)\geq 0 \ \forall y$.

□

36 Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$ και η f' είναι συνεχής.
Δείξτε ότι: $\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \leq \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2dt$

Λύση

Σκέψεις:

(Α) Έχουμε $\int_0^a |f(t)f'(t)|dt = \int_0^a \left|\left(\frac{f^2}{2}\right)'(t)\right|dt$

(Β) Επίσης, $\int_0^a \left(\frac{f^2}{2}\right)'(t)dt = \frac{(f(a))^2}{2} - \cancel{\frac{(f(0))^2}{2}} \to 0$

(Γ) Επίσης, $(f(a))^2 = \left(\int_0^a 1\cdot f'(t)dt\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \int_0^a 1^2 dt \cdot \int_0^a (f'(t))^2 dt = \int_0^a (f'(t))^2 dt$

Αν κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $f' \geq 0$, δηλαδή, $f\uparrow$, αφού $f(0)=0$, έχουμε $f(t)=\int_0^t f'(s)ds \geq 0 \ \forall t \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)f'(t)\geq 0 \Rightarrow |f(t)f'(t)| = f(t)f'(t)$.

Άρα, $\int_0^a (ff') \overset{(A)}{=} \int_0^a \left(\frac{f^2}{2}\right)' \overset{(B)}{=} \frac{(f(a))^2}{2} \overset{(\Gamma)}{\leq} \dots \leq \frac{a}{2}\int_0^a (f'(t))^2 dt$

Για τη γενική περίπτωση:

Θεωρούμε την συνάρτηση $g:[0,a]\to\mathbb{R}$ με $g(t)=\int_0^t |f'(x)|dx$.

Τότε, (1) $g'(t)=|f'(t)|\geq 0$

(2) $g(0)=0$

Άρα, δείξαμε ότι:

$\int_0^x g(t)g'(t) \leq \frac{a}{2}\int_0^a (g'(t))^2 dt = \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2 dt$.

Αν δείξουμε ότι: $\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \leq \int_0^a g(t)g'(t)dt$ έχουμε το ζητούμενο.

Έχουμε $|f(t)| = \left|\int_0^t f'(x)dx\right| \leq \int_0^t |f'(x)|dx \underset{ορ}{=} g(t)$ και $|f'(t)|=g'(t)\geq 0$.

$\Rightarrow |f(t)|\cdot|f'(t)| \leq g(t)g'(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \int_0^a |f(t)f'(t)|dt \leq \int_0^a g(t)g'(t)dt$. □

52) Αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσες, τότε:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Λύση

Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $I=\int_a^b\Big[\underbrace{\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dx}_{A(y)}\Big]dy$

Παρατήρηση: $I\geq 0$, διότι: $\forall x,y\in[a,b]$ $\quad (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις: $x<y$: $(-)(-)=(+)$; $x>y$: $(+)(+)=(+)$.

Για σταθερό y, $A(y)=\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b f(y)g(x)dx-\int_a^b f(x)g(y)dx+\int_a^b f(y)g(y)dx=$

$$=\int_a^b f(x)g(x)dx-f(y)\int_a^b g-g(y)\int_a^b f+f(y)g(y)(b-a).$$

Τότε, $I=\int_a^b A(y)dy=\int_a^b\Big(\underbrace{\int_a^b f(x)g(x)dx}_{\text{σταθερό}}\Big)dy-\int_a^b f(y)\Big(\int_a^b g\Big)dy-\int_a^b g(y)\Big(\int_a^b f\Big)dy+\int_a^b f(y)g(y)(b-a)dy=$

$$=\Big(\int_a^b fg\Big)(b-a)-\Big(\int_a^b g\Big)\int_a^b f(y)dy-\Big(\int_a^b f\Big)\int_a^b g(y)dy+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\,dy=$$

$$=2(b-a)\int_a^b fg-2\int_a^b f\cdot\int_a^b g.\qquad\square$$

$\boxed{54}$ (a) [=33] Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

Δείξτε ότι $\underbrace{\int_0^1 x^{n-1}g(x)dx}_{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

(b) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή f'.

Δείξτε ότι: $\underbrace{n\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx}_{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}f(1)$

Λύση

(a) Η g είναι φραγμένη: $\exists M>0:\ \forall x\in[0,1]\ |g(x)|\le M$.

Τότε, $|a_n|=\Big|\int_0^1 x^{n-1}g(x)dx\Big|\le\int_0^1 x^{n-1}|g(x)|dx\le M\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{M}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$

Άρα, $a_n\to0$.

(b) Γράφουμε $b_n=\int_0^1 nx^{n-1}\cdot f(x)dx=\int_0^1(x^n)'f(x)dx=x^nf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^nf'(x)dx=$

$$=f(1)-\int_0^1 x^nf'(x)dx.$$

Αφού η f' είναι συνεχής (από το (a) με $g=f'$) έχουμε:

$$\int_0^1 x^nf'(x)dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Άρα, $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f(1)-0=f(1).\qquad\square$