Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 23ο (16-06-2014)

Θεώρημα 1

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\geq 0$, ολοκληρώσιμη.
Υπάρχει $\xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.
(Για την $g(x)=1$ παίρνουμε: f συνεχής $\Rightarrow \exists\xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$)

Για κάθε ολοκληρώσιμη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Θεώρημα 2

Η F είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα 3

Αν f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$.
(Ειδικότερα: f συνεχής στο $[a,b]\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$).

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Η $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>παράγουσα</u> (ή <u>αντιπαράγωγος</u>) της f αν $G'=f$.

Θεμελιώδες Θεώρημα 1

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Αν G είναι παράγουσα της f τότε: $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$.

Απόδειξη

Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι, επίσης, παράγουσα της f· απ'το Θεώρημα 3, $F'=f$.

Άρα $(G-F)'=G'-F'=f-f=0$.

Άρα, $\exists c\in\mathbb{R}: \forall x\in[\alpha,\beta]\quad f(x)=\int_\alpha^x f(t)dt = G(x)+c$.

Για $x=\alpha$ παίρνουμε $0=F(\alpha)=G(\alpha)+c \Rightarrow c=-G(\alpha)$

Άρα $\forall x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt=G(x)-G(\alpha)$.

Για $x=\beta$ έχουμε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$. ■

Θεμελιώδες Θεώρημα 2

Έστω $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη, τότε: $\int_\alpha^\beta G'(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

(Δεν ξέρουμε ότι η G' είναι συνεχής, άρα, παρόλο που η G είναι παράγουσα της G' δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το 1ο ΘΘ.)

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι: $\forall P=\{\alpha=x_0<\dots<x_\kappa<x_{\kappa+1}<\dots<x_n=\beta\}$ του $[\alpha,\beta]$ ισχύει: $L(G',P)\le G(\beta)-G(\alpha)\le U(G',P)$.

Αν την δείξω έχω: $\int_\alpha^\beta G'(t)dt=\sup L(G',P)\le G(\beta)-G(\alpha)\le \inf U(f,P)=\int_\alpha^\beta G'(t)dt$

Για δοσμένη P, έχουμε:

$$G(\beta)-G(\alpha)=\left(G(\overset{\beta}{x_n})-G(x_{n-1})\right)+\dots+\underbrace{\left(G(x_{\kappa+1})-G(x_\kappa)\right)}_{\substack{G'(\xi_\kappa)(x_{\kappa+1}-x_\kappa)\\(\text{ΘΜΤ})}}+\dots+\left(G(x_1)-G(\overset{\alpha}{x_0})\right)$$

Για κάθε $\kappa=0,1,\dots,n-1$, εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για την G στο $[x_\kappa,x_{\kappa+1}]$ βρίσκουμε $\xi_\kappa\in(x_\kappa,x_{\kappa+1})$: $G(x_{\kappa+1})-G(x_\kappa)=G'(\xi_\kappa)(x_{\kappa+1}-x_\kappa)$.

Αφού $\xi_\kappa\in(x_\kappa,x_{\kappa+1})$ ισχύει $m_\kappa(G')\le G'(\xi_\kappa)\le M_\kappa(G')$

Άρα $m_\kappa(G')(x_{\kappa+1}-x_\kappa)\le \underbrace{G(x_{\kappa+1})-G(x_\kappa)}_{G(\xi_\kappa)(x_{\kappa+1}-x_\kappa)}\le M_\kappa(G')(x_{\kappa+1}-x_\kappa)$

Προσθέτουμε αυτές τις ανισότητες και έχουμε:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} m_k(G')(x_{k+1}-x_k)}_{L(G',P)} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(G(x_{k+1})-G(x_k)\right)}_{G(b)-G(a)} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} M_k(G')(x_{k+1}-x_k)}_{U(G',P)} \quad \blacksquare$$

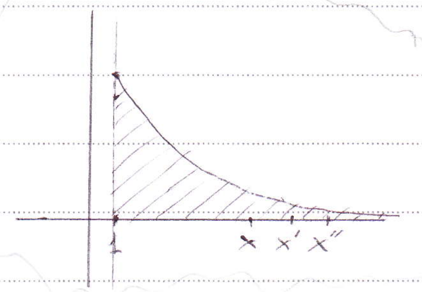
Γενικευμένα Ολοκληρώματα

I Ολοκλήρωμα μιας $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, όπου $b\in\mathbb{R}$, $b>a$ ή $b=+\infty$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ για κάθε $a<x<b$.
Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ και αυτό είναι το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b)$.
Όμοια, αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, όπου $a\in\mathbb{R}$, $a<b$ ή $a=-\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,b]$ για κάθε $a<x<b$ τότε εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$.

Παραδείγματα

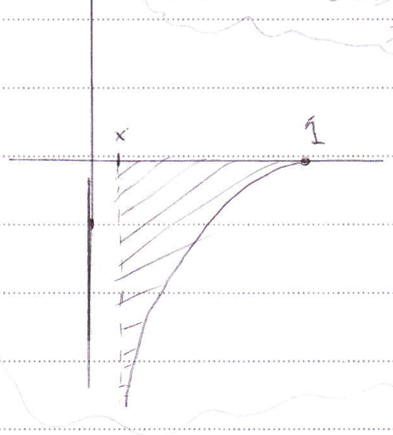
(1) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{t^2}$



Για κάθε $x>1$ υπολογίζουμε το $\int_1^x \frac{1}{t^2}dt =$ (∃ ∫ f συνεχής στο $[1,x]$)
$= -\frac{1}{t}\Big|_1^x = -\frac{1}{x}+1 = 1-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
Απ' τον ορισμό $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \dots = 1$.

(2) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\ln t$

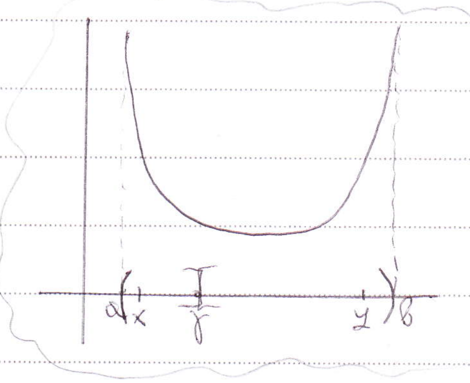
$(t\ln t - t)' = \ln t + t\cdot\frac{1}{t} - 1$



Για κάθε $0<x<1$ υπολογίζουμε το $\int_x^1 \ln t\,dt =$
$= t\ln t - t\Big|_x^1 = (1\ln 1 - 1)-(x\ln x - x) = -1 - x\ln x + x$
Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to0^+}(-1-x\ln x+x) =$
$= -1 - \lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x) + \lim\limits_{x\to0^+}x = -1 - \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right) \overset{DLH}{=}$
$= -1 - \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}\right) = -1 - \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -1 - \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = -1$.

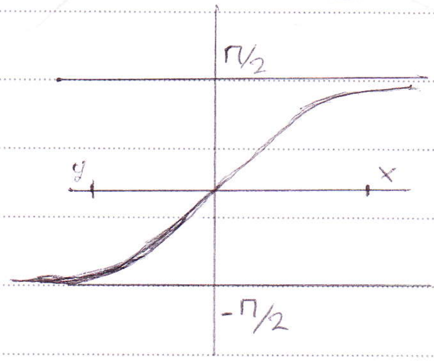
Άρα $\int_0^1 \ln t\,dt = -1$.

II Έχουμε $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι: $\forall \alpha<x<y<\beta$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,y]$.

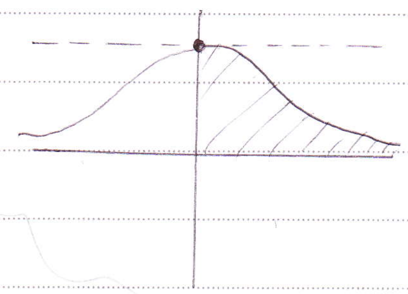


Επιλέγουμε αυθαίρετα $\gamma\in(\alpha,\beta)$.
Τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης περίπτωσης στα $(\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta)$.
Αν υπάρχουν τα $\int_\alpha^\gamma f$ και $\int_\gamma^\beta f$ (με την έννοια που τους δώσαμε στην προηγούμενη περίπτωση), λέμε, ότι: $\int_\alpha^\beta f=\int_\alpha^\gamma f+\int_\gamma^\beta f$.
[Σημείωση: Δεν έχει σημασία ποιο γ θα πάρουμε.]

Παράδειγμα

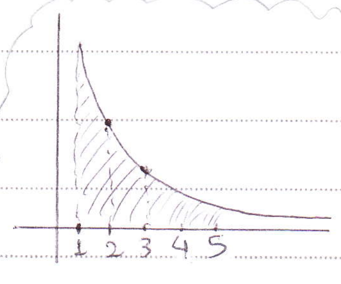


Για την $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt$:
Παίρνουμε $\gamma=0$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν τα $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+t^2}dt$, $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$.
Για το δεύτερο:
για $x>0$ υπολογίζουμε το $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=$
$=\text{τοξεφ}\,t\big|_0^x=\text{τοξεφ}\,x-\cancel{\text{τοξεφ}\,0}^{\,0}=\text{τοξεφ}\,x\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}$.



Όμοια:
$\int_y^0\frac{1}{1+t^2}dt=\cancel{\text{τοξεφ}\,0}^{\,0}-\text{τοξεφ}\,y\to-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$
Με βάση τον ορισμό:
$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

Κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές (ΠΡΟΣΟΧΗ!)



Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ φθίνουσα και μη αρνητική.
Ορίζουμε $a_k=f(k)$.
Τότε, η $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}a_k \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \exists\int_1^{+\infty}f(t)\,dt}$ ✱

Παραδείγματα

(1) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln k}$ Θεωρώ την $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

$[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln x}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln x}$

Η f είναι $\downarrow$ και ≥ 0.

Από το κριτήριο, η $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\ln k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \exists \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$.

Υπολογίζουμε το $\int_2^M \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)\Big|_2^M = \ln(\ln M)-\ln(\ln 2) \xrightarrow[M\to+\infty]{} +\infty$.

Άρα, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = +\infty \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει.

(2) $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ $f(x)=\frac{1}{x}\downarrow$, $x\in[1,+\infty)$

$\int_1^M \frac{1}{x}dx = \ln M - \ln 1 \xrightarrow[M\to+\infty]{} +\infty$

Άρα, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = +\infty \Rightarrow \sum\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

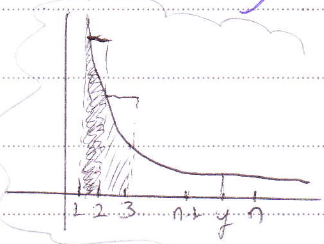
Απόδειξη (του ⊛)

Σημειώσεις για την απόδειξη:

① Αφού $a_k \geq 0$ έχουμε $s_n \nearrow$, άρα η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $\exists M: \forall n \;\; s_n \leq M$.

② $F(y) = \int_1^y f(x)dx \nearrow$, άρα το $\int_1^{+\infty} f = \lim_{y\to+\infty}F(y)$ υπάρχει αν και μόνον αν $\exists M: \forall y>1 \;\; F(y)\leq M$.

($\Rightarrow$) Αρκεί να βρούμε $M>0: \forall y>1 \;\; \int_1^y f(x)dx \leq M$.



Έστω $y>1$.

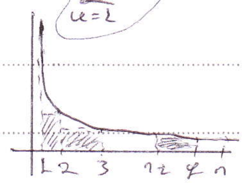
Θεωρούμε τον $n=[y]+1$

Τότε, $F(y)\leq F(n) = \int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx \leq$

$\leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) =$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = s_{n-1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k}_{=M}$

($\Leftarrow$) Τώρα, υποθέτουμε ότι υπάρχει το $I = \int_1^{+\infty} f(x)dx$.



Ζητάμε $M>0: \forall n\geq 1 \;\; s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M$.

Έχουμε: $a_2 = f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx$

$a_3 = f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx$

$\vdots$

$a_n = f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^2 f + \int_2^3 f + \dots + \int_{n-1}^n f = a_1 + \int_1^n f$,

δηλαδή, $\forall n\geq 1 \;\; s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq \underbrace{a_1 + I}_{=M}$

Ασκήσεις (Απαντημένα Θέματα Εξετάσεων)

10 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή, $\exists f'$ και είναι συνεχής).
Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, δείξτε ότι: $\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\int_a^b|f'(x)|dx$.

Λύση

Γράφουμε: $|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}f'(t)dt\right|\le\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(t)|dt\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(t)|dt=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}|f'|+\int_{x_1}^{x_2}|f'|+\dots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}|f'|=$$
$$=\int_{x_0}^{x_n}|f'|=\int_a^b|f'|.\qquad\square$$

14 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη.
Δείξτε ότι: $\underbrace{\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu(nx)dx}_{I_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ και $\underbrace{\int_a^b f(x)\eta\mu(nx)dx}_{J_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Λύση

$$I_n=\int_a^b f(x)\left(\frac{\eta\mu(nx)}{n}\right)'dx=\left.\frac{f(x)\eta\mu(nx)}{n}\right|_a^b-\int_a^b f'(x)\frac{\eta\mu(nx)}{n}dx=$$
$$=\frac{f(b)\eta\mu(nb)-f(a)\eta\mu(na)}{n}-\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\eta\mu(nx)dx.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[a,b]\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists M>0: |f'(x)|\le M\quad\forall x\in[a,b]$

Άρα, $\left|\frac{f(b)\eta\mu(nb)-f(a)\eta\mu(na)}{n}\right|\le\frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\eta\mu(nx)dx\right|\le\frac{1}{n}\int_a^b|f'(x)|dx\le\frac{M(b-a)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

Όμοια, για το J_n. $\square$