Σάββατο 14/06
Πρόοδος
11:00 - 14:00

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 21ο (11-06-2014)

Κεφάλαιο 5: Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

1. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

- Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, η μέση τιμή της f είναι ο αριθμός $\mathbb{E}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

- Ειδική μορφή του ΘΜΤ:

  Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $\exists\, \xi\in[a,b]: f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

- Γενική μορφή:

  Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και μη-αρνητική $(\forall x\in[a,b],\ g(x)\geq 0)$.

  Τότε, $\exists\, \xi\in[a,b]: \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

(Η ειδική μορφή προκύπτει απ' τη γενική, αν πάρουμε $g\equiv 1$, στο $[a,b]$, οπότε $\int_a^b g(x)dx=b-a$)

Απόδειξη

Η f παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$.
Για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε: $m\leq f(x)\leq M$

$\Rightarrow \forall x\in[a,b]\quad mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$ (διότι $g(x)\geq 0$)

$\Rightarrow\quad m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$ (*)

- Αν $\int_a^b g(x)dx>0$ παίρνουμε:

$$m\leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{=d}\leq M$$

Αφού $d\in[\underset{\min(f)}{m},\underset{\max(f)}{M}]$, από ΘΕΤ $\exists\, \xi\in[a,b]: f(\xi)=d=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

- Αν $\int_a^b g(x)dx=0$, η (*) δίνει $0\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx=0$

Συνεπώς, ζητάμε ξ: $0=f(\xi)\cdot 0$ και μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε $\xi\in[a,b]$

3] Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Δείξτε ότι $\exists s\in[0,1]: \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{f(s)}{3}$

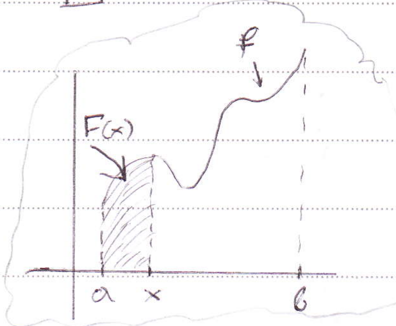
Λύση

Από το Θεώρημα, με $g(x)=x^2$, έχουμε $s\in[0,1]$ με:

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = f(s)\int_0^1 x^2\,dx = f(s)\cdot\frac{1}{3}. \qquad \square$$

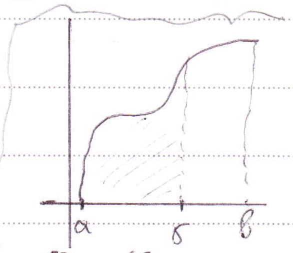
Ορισμός

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Ορίζουμε $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$.



Συμφωνία: • $\int_\alpha^\alpha f(t)\,dt = 0$

• Αν $\alpha>\beta$ και η $f:[\beta,\alpha]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε: $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = -\int_\beta^\alpha f(t)\,dt$.



$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\beta f$$

Η F λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Θεώρημα 1

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$ της f είναι Lipschitz-συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

Η f είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists M>0: \forall t\in[\alpha,\beta]\ |f(t)|\le M$. Έστω $x,y\in[\alpha,\beta]$.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y<x$.
Γράφουμε:

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_\alpha^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \le$$
$$\overset{(*)}{\le} \int_y^x |f(t)|\,dt \le \int_y^x M\,dt = M(x-y) = M|x-y| \qquad \blacksquare$$

⊛ Λήμμα (πολύ βασικό)

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε ξέρουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

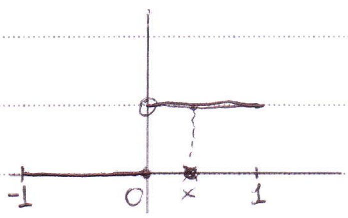
Έχουμε: $-|f| \le f \le |f| \Rightarrow -\underbrace{\int_\alpha^\beta |f|}_{K} \le \underbrace{\int_\alpha^\beta f}_{\Lambda} \le \underbrace{\int_\alpha^\beta |f|}_{K} \Rightarrow |\Lambda| \le K$.

Δηλαδή: $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \le \int_\alpha^\beta |f|$.

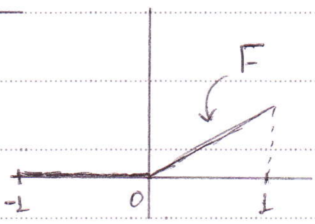
Θεώρημα 2

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0\in[\alpha,\beta]$.
Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\boxed{F'(x_0)=f(x_0)}$.

Παράδειγμα:



$$F(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases},\ \text{διότι}\ \int_{-1}^x f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x 1\,dt=x.$$



Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\alpha<x_0<\beta$ (οι περιπτώσεις $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$ γίνονται με τον ίδιο, και απλούστερο, τρόπο).

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ και ότι είναι ίσο με $f(x_0)$.

(h>0) ⊛ Γράφουμε: $\frac{1}{h}\left(F(x_0+h)-F(x_0)\right)=\frac{1}{h}\left(\int_\alpha^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt\right)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 $\exists\delta>0$: "αν $|y-x_0|<\delta$, τότε $|f(y)-f(x_0)|<\varepsilon$" (⊛)

Αν $0<h<\delta$, τότε $\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-f(x_0)\right|=$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt \overset{*}{<}$$

$$\overset{*}{<} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\, dt = \frac{1}{h}\cdot\varepsilon(x_0+h-x_0) = \varepsilon.$$

$(h<0)$ Αν $-\delta<h<0$, τότε:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{-\int_{x_0+h}^{x_0} f}{-|h|} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt - \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0+h}^{x_0}(f(t)-f(x_0))dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt \overset{*}{<}$$

$$\overset{*}{<} \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon\, dt = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 3

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε, η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $\forall x\in[a,b]$ $F'(x)=f(x)$.

Ορισμός

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Παράγουσα (ή αντιπαράγωγος) της f λέμε κάθε συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $\forall x\in[a,b]$ $G'(x)=f(x)$.

Παραδείγματα

f	G
x	$x^2/2$, $x^2/2+3$, ...
e^x	e^x, e^x-5, ...
συνx	ημx, ...

Παρατηρήσεις

(1) Αν η G είναι παράγουσα της f και $c \in \mathbb{R}$, τότε η $H = G + c$ είναι, επίσης παράγουσα της f (διότι $H' = (G+c)' = (G)' + (c)' = f + 0 = f$).

(2) Αν οι G_1, G_2 είναι παράγουσες της f, τότε: $(G_1 - G_2)' = G_1' - G_2' = f - f = 0 \xrightarrow{(\text{Απ. Αφ } I)} \exists c \in \mathbb{R}: G_2 = G_1 + c$.

Υποθέτουμε ότι η $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι <u>συνεχής</u>.

(1) Η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι <u>παράγουσα</u> της f: απ' το Θ3, έχουμε: $\exists F' = f$.

(2) Έστω ότι (με κάποιον τρόπο) έχουμε βρει μια άλλη παράγουσα G της f.

Από την παρατήρηση 2, $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in [a,b] \ G(x) = F(x) + c$.

Τότε: $G(a) = \cancel{F(a)}^{0} + c = c$

$\Rightarrow G(b) = F(b) + c = \int_a^b f(t)dt + G(a)$

$\Rightarrow \boxed{G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt}$.

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,b]$, τότε:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)}.$$