Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 22ο (13-06-2014)

Ο ορισμός του Riemann για το ολοκλήρωμα

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.

(1) Θεωρούμε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$.
Το πλάτος της P είναι ο $\|P\|=\max\{x_1-x_0,\dots,x_{k+1}-x_k,\dots,x_n-x_{n-1}\}$.

(2) Αν P είναι διαμέριση του $[a,b]$, επιλογή σημείων για την P λέμε κάθε $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$, όπου $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$.

Ορίζουμε $\Sigma(f,P,\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

Λέμε ότι η f είναι (R-)ολοκληρώσιμη αν $\exists I\in\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα:

"$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: αν P διαμέριση του $[a,b]$ με $\|P\|<\delta$, τότε $\forall$ επιλογή σημείων Ξ, ως προς την P, έχουμε $|\Sigma(f,P,\Xi)-I|<\varepsilon$".

Αν αυτό ισχύει, γράφουμε "$\int_a^b f(x)dx$" $\underset{\text{ορ.}}{=} I$.

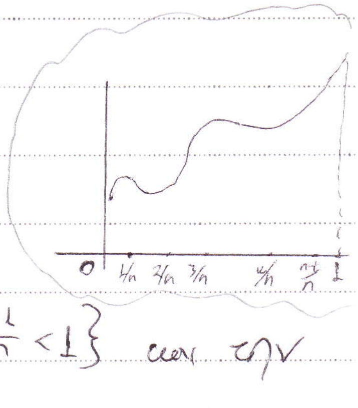
Θεώρημα

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.

Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux (δηλαδή, με τον ορισμό που μελετήσαμε) αν και μόνον αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann (δηλαδή, με τον ορισμό που δώσαμε σήμερα) και σε αυτήν την περίπτωση τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

Ασκήσεις (Κεφάλαιο 4)

21 Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} a_n$, όπου $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$



Λύση

Θεωρούμε τη διαμέριση $P_n=\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{k}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<1\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1\}$ $\left(\frac{1}{n}\in[0,\frac{1}{n}], \frac{2}{n}\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}], \dots, 1\in[\frac{n-1}{n},1]\right)$

Έχουμε: $\sum(f, P_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\overset{1/n}{(\overset{k/n}{x_k}-\overset{k-1/n}{x_{k-1}})} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) = a_n$.

Επιπλέον $\|P_n\| = \frac{1}{n} \to 0$,

Από Θεωρία $a_n = \sum(f, P_n, \Xi_n) \to \int_0^1 f(x)dx$. □

22 Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \overset{\to b_n}{\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}} = \frac{2}{3}$

Λύση

$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

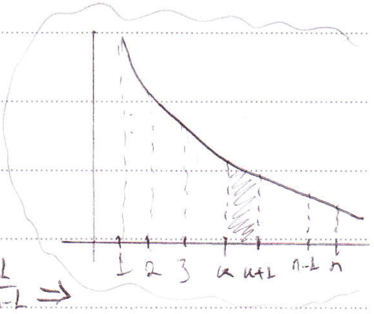
Θεωρούμε την $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$.

Τότε $f(\frac{k}{n}) = \sqrt{\frac{k}{n}}$, $k=1,\dots,n$

Άρα, $b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \xrightarrow{\text{Άσκ. 21}} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$. □

24 Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}dx}_{\ln x|_1^n = \ln n - \overset{0}{\cancel{\ln 1}} = \ln n}$ συγκλίνει

Λύση



Γράφουμε $\int_1^n \frac{1}{x}dx = \int_1^2\frac{1}{x}dx + \int_2^3\frac{1}{x}dx + \dots + \int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx$

Επίσης, έχουμε $\frac{1}{k+1}\cdot 1 \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \le \frac{1}{k}\cdot 1$.

Δηλαδή,
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} &\le \int_1^2 \frac{1}{x}dx \le 1 \\ \frac{1}{3} &\le \int_2^3 \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} &\le \int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{n-1} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{1}{x}dx \le 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \le \underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \int_1^x \frac{1}{x}dx}_{\gamma_n} \le 1$$

Αν δείξουμε ότι η (γ_n) είναι μονότονη (αφού είναι και φραγμένη) θα έχουμε ότι συγκλίνει

Γράφουμε $\gamma_{n+1}-\gamma_n = \cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \int_1^n \frac{1}{x}dx =$

$= \frac{1}{n+1} - \left(\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx - \int_1^n \frac{1}{x}dx\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \le 0$, διότι

$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{n+1}\cdot 1 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow (\gamma_n)\downarrow$.

Αφού $(\gamma_n)\downarrow$ και φραγμένη, τότε συγκλίνει. $\square$

Σημείωση

Είδαμε ότι υπάρχει το $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\int_1^n \frac{1}{x}dx\right)$ και $\gamma\geq 0$.

Αποδεικνύεται ότι $\gamma>0$ (και υπάρχουν ακριβείς προσεγγίσεις του)

Ανοιχτό (!): ο γ είναι ρητός ή άρρητος;

↳ η σταθερά του Euler

25 Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά $M>0$

(δηλαδή, $\forall x,y\in[0,1]$ $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$)

Δείξτε ότι $\underbrace{\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{A_n} \leq \frac{M}{2n}$.

Λύση

Γράφουμε: $A_n = \left|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dx \overset{\text{Lipschitz}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M\cdot\left|x-\frac{k}{n}\right|dx = M\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|x-\frac{k}{n}\right|dx$$

Παρατηρούμε ότι: $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|x-\frac{k}{n}\right|dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n}-x\right)dx = -\left.\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2}\right|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} =$

$$= \frac{\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

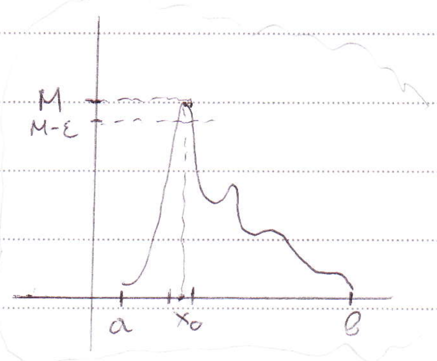
Άρα, $A_n \leq M\cdot\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = M\cdot \cancel{n}\cdot\frac{1}{2n^{\cancel{2}}} = \frac{M}{2n}$. $\square$

30 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f\geq 0$.

Θέτουμε $M=\max(f)$.

Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M$

Λύση



Έχουμε $\int_a^\beta f^n(x)\,dx \le \int_a^\beta M^n\,dx = M^n(\beta-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_n = \left(\int_a^\beta f^n(x)\,dx\right)^{1/n} \le \left(M^n(\beta-a)\right)^{1/n} = M\sqrt[n]{\beta-a} \longrightarrow M\cdot 1$

Άρα, $\limsup \gamma_n \le M$. (μπορούμε να υποθέσουμε $M>0$)

Θεωρούμε $x_0 \in [a,\beta]$ με $f(x_0)=M$

Έστω $\varepsilon>0$ (με $\varepsilon<M$)

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \exists \delta>0$: $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,\beta]$ και

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $f(x) > M-\varepsilon$.

Γράφουμε, $\int_a^\beta f^n(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (M-\varepsilon)^n\,dx = 2\delta(M-\varepsilon)^n$

Άρα, $\gamma_n = \left(\int_a^\beta f^n(x)\,dx\right)^{1/n} \ge \sqrt[n]{2\delta(M-\varepsilon)^n} = \sqrt[n]{2\delta}\cdot(M-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} M-\varepsilon$.

Συνεπώς, $\liminf \gamma_n \ge \liminf\left(\sqrt[n]{2\delta}\,(M-\varepsilon)\right) = M-\varepsilon$.

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε:

$M \le \liminf \gamma_n \le \limsup \gamma_n \le M$

το οποίο μας δίνει $\gamma_n \to M$. □