Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 19ο (04-06-2014)

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα 1 (γραμμικότητα)

Αν f,g ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και $t,s\in\mathbb{R}$, τότε η $(tf+sg)$ είναι ολοκληρώσιμη και:
$$\int_\alpha^\beta tf+sg = t\int_\alpha^\beta f + s\int_\alpha^\beta g.$$

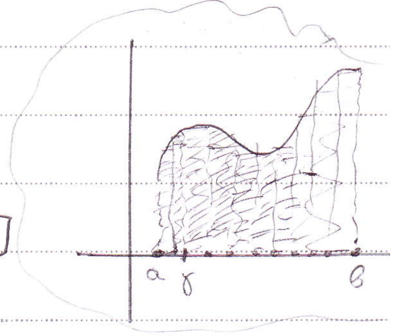
Θεώρημα 2 (μονοτονία)

Αν f,g ολοκληρώσιμη και $f\le g$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε:
$$\int_\alpha^\beta f \le \int_\alpha^\beta g.$$

Θεώρημα 3 (προσθετικότητα)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και έστω $\alpha<\gamma<\beta$.
Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ $\Leftrightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\gamma]$ και στο $[\gamma,\beta]$.
Τότε, $\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$.

Απόδειξη



($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$.
Ζητάμε διαμερίσεις P_1 του $[\alpha,\gamma]$, P_2 του $[\gamma,\beta]$ ώστε:
(1) $U(f,P_1|[\alpha,\gamma]) - L(f,P_1|[\alpha,\gamma]) < \varepsilon$
(2) $U(f,P_2|[\gamma,\beta]) - L(f,P_2|[\gamma,\beta]) < \varepsilon$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει διαμέριση Q του $[\alpha,\beta]$ ώστε: $U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$.
Θεωρούμε τη διαμέριση $P=Q\cup\{\gamma\}=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_k=\gamma<\dots<x_n=\beta\}$.
Αφού $Q\subseteq P$ έχουμε $U(f,P)\le U(f,Q)$ και $L(f,P)\ge L(f,Q)$, άρα
$U(f,P)-L(f,P)\le U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$

Αν $P_1=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<\gamma\}$, $P_2=\{\gamma<x_{k+1}<\dots<x_n=\beta\}$, τότε

$$L(f,P)=\sum_{s=0}^{k-1} m_s(x_{s+1}-x_s)+m(\gamma-x_k)+m'(x_{k+1}-\gamma)+\sum_{s=k+1}^{n-1} m_s(x_{s+1}-x_s)=L(f,P_1)+L(f,P_2)$$

και $U(f,P)=U(f,P_1)+U(f,P_2)$.

Άρα, $(\underbrace{U(f,P_1)-L(f,P_1)}_{\geq 0})+(\underbrace{U(f,P_2)-L(f,P_2)}_{\geq 0})=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon \\ U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon \end{cases}$$

(⇐) Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει R διαμέριση του $[a,\gamma]$ ώστε $U(f,R)-L(f,R)<\varepsilon/2$ και υπάρχει διαμέριση Q του $[\gamma,\beta]$ ώστε:

$$U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon/2$$

Ορίζουμε $P=R\cup Q$.

Η P είναι διαμέριση του $[a,\beta]$ και

$$U(f,P)-L(f,P)=U(f,R)+U(f,Q)-L(f,R)-L(f,Q)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$.

Για την ισότητα:

Για τις R,Q,P της (⇐) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} L(f,R)\leq \int_a^\gamma f \leq U(f,R) \\ L(f,Q)\leq \int_\gamma^\beta f \leq U(f,Q) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} L(f,P)\leq \int_a^\gamma f+\int_\gamma^\beta f \leq U(f,P) \Rightarrow$$

Όμως:

$$L(f,P)\leq \int_a^\beta f \leq U(f,P)$$

Άρα, $\left|\int_a^\beta f-\left(\int_a^\gamma f+\int_\gamma^\beta f\right)\right|\leq U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα $\int_a^\beta f=\int_a^\gamma f+\int_\gamma^\beta f$. ■

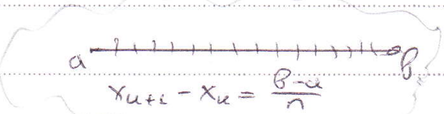
Παραλλαγή του ορισμού του ολοκληρώματος

(I) Αυτός που δώσαμε (όλες οι P).

(II) Διαμερίσεις P_n: χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε n ίσα κομμάτια

Ερώτηση: Ισχύει $L(f,P_n) \le L(f,P_{n+1})$;

Απάντηση: ΟΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ.



Αναγκαστικά θα πάρουμε:

$\underline{\int_a^\beta} f = \sup_n L(f,P_n)$, $\overline{\int_a^\beta} f = \inf_n U(f,P_n)$ και κοιτάμε αν είναι ίσα.

(III) Διαμερίσεις P_{2^n}: σε 2^n ίσα κομμάτια.

Εδώ $P_{2^n} \subseteq P_{2^{n+1}}$.

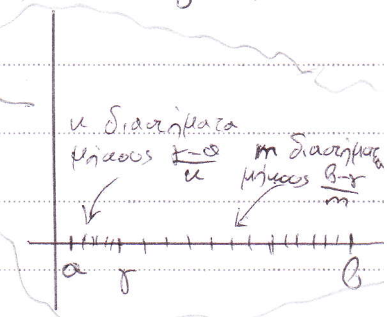
Τώρα $L(f,P_{2^n})\uparrow$, $U(f,P_{2^n})\downarrow$

Αν προσπαθήσω να δείξω το Θεώρημα 3 με τον ορισμό (II) ή (III) έχω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και κάποιο $\alpha<\gamma<\beta$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\gamma]$, $[\gamma,\beta]$.

→ Για να τις "ταιριάξω" σε διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ με υποδιαστήματα ίσου μήκους θα πρέπει να υπάρχουν k,m:

$$\frac{\gamma-\alpha}{k} = \frac{\beta-\gamma}{m} \Rightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$



Υπάρχουν, όμως $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma} \notin \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 4

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to[m,M]$ ολοκληρώσιμη.

Αν $\varphi:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η $\varphi\circ f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Συνέπειες

(1) f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow |f|$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (η $|f| = \varphi\circ f$ όπου $\varphi(y)=|y|$ συνεχής)

(2) f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow f^2$ ολοκληρώσιμη. (η $f^2=\varphi\circ f$, όπου $\varphi(y)=y^2$ συνεχής)

(3) f, g ολοκληρώσιμες $\Rightarrow$ $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη $\left(f\cdot g = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4} \right.$ ⊕ συνέπεια 2 ⊕ γραμμικότητα $\left.\right)$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$.

Ζητάμε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε: $U(\varphi\circ f,P)-L(\varphi\circ f,P)<\varepsilon$, δηλαδή:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k)<\varepsilon$$

(1) Η φ είναι συνεχής στο $[m,M] \Rightarrow \exists A>0: \forall y\in[m,M]\ |\varphi(y)|\leq A$.

(2) Η φ είναι ομ. συνεχής: για το δοσμένο $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: (μπορούμε να υποθέσουμε $\delta<\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}$)

"αν $y,y'\in[m,M]$ και $|y-y'|<\delta$, τότε $|\varphi(y)-\varphi(y')|<\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}$"

(3) Η f είναι ολοκληρώσιμη

Άρα, για κάθε $\zeta>0$ $\exists P$ διαμέριση του $[a,b]$:

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k(f)-m_k(f)\right)(x_{k+1}-x_k)<\zeta$$

Παίρνουμε $\zeta=\delta^2$ και θεωρούμε μια P που ικανοποιεί το (3).

Ορίζουμε $I=\{0\leq k\leq n-1: M_k(f)-m_k(f)\geq\delta\}$

$J=\{0\leq k\leq n-1: M_k(f)-m_k(f)<\delta\}$

Παρατηρούμε ότι: (1) Αν $k\in J$, τότε $\forall x,x'\in[x_k,x_{k+1}]$ έχουμε:

$$|\overset{y}{f(x)}-\overset{y'}{f(x')}|\leq M_k(f)-m_k(f)<\delta$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} |\varphi(f(x))-\varphi(f(x'))|<\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f)\leq\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}$$

(*) Άσκηση ΑΠΙ
Έστω $\emptyset\neq\Gamma\subseteq\mathbb{R}$ φραγμένο.
$\forall a,b\in\Gamma\ |b-a|<\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\Gamma-\inf\Gamma\leq\Delta$

(2) Από την (3) έχουμε:

$$\delta\left(\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)\right)\leq\sum_{k\in I}\underbrace{\left(M_k(f)-m_k(f)\right)}_{\geq\delta}(x_{k+1}-x_k)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k(f)-m_k(f)\right)(x_{k+1}-x_k)<\delta^2$$

Δηλαδή: $\boxed{\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)<\delta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k\in I}\left(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k)\leq\sum_{k\in I}2A(x_{k+1}-x_k)<2A\delta$$

Έχουμε:

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k\in I}\left(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k)+$$

$$+\sum_{k\in J}\left(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f)\right)(x_{k+1}-x_k)<$$

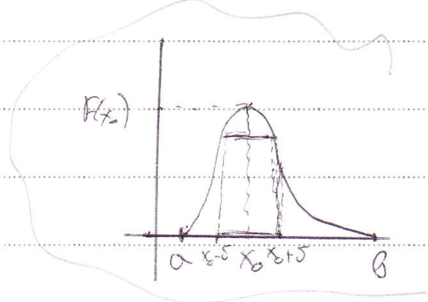
$$<2A\delta+\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k)\leq 2A\delta+\frac{\varepsilon}{2A+(b-a)}(b-a)<$$

$$<\varepsilon.$$

Αρκεί: $2A\delta < \frac{2A}{2A+(\beta-\alpha)}\cdot\varepsilon \Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2A+(\beta-\alpha)}$ ■

Βασική Άσκηση

14 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f\geq 0$.
Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$



Λύση

Θα υποθέσουμε ότι $\exists x_0\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_0)>0$ και θα δείξουμε ότι $\int_\alpha^\beta f>0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha<x_0<\beta$ (αν π.χ. $f(\beta)>0$ $\exists\delta>0: f(x)>0$ $\forall x\in[\beta-\delta,\beta]$).

Η f είναι συνεχής στο x_0.

Άρα, για $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$, μπορούμε να βρούμε $\delta>0$:

$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$, $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(\alpha,\beta)$

$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2}$

$f\geq m$ στο $[\gamma,\delta]$
$\Rightarrow \int_\gamma^\delta f\geq m(\delta-\gamma)$

Γράφουμε $\int_\alpha^\beta f \overset{(\Theta 3)}{=} \underset{(f\geq 0)}{\int_\alpha^{x_0-\delta} f} + \underset{(f\geq \frac{f(x_0)}{2})}{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f} + \underset{(f\geq 0)}{\int_{x_0+\delta}^{\beta} f} \geq$

$$\geq 0+\frac{f(x_0)}{2}\cdot 2\delta+0=\delta f(x_0)>0.$$ □