Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 9ο (10-05-2014)

Ερωτήσεις Κατανόησης (Σ/Λ) (... συνέχεια)

(6) Αν $a_k>0$ και $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}=1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: $a_k=\frac{1}{k^2}>0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\to 1$, αλλά η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

(7) Αν $a_k>0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to+\infty$, τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει

ΣΩΣΤΟ: Αφού $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to+\infty>1$ έχουμε $a_k\to+\infty$ (κριτήριο λόγου:
$\exists N\in\mathbb{N}: \forall k\geq N$ $\frac{a_{k+1}}{a_k}>2 \Rightarrow \begin{cases} a_{N+1}>2a_N \\ a_{N+2}>2a_{N+1}>2^2a_N \\ \vdots \\ a_{N+s}>2^s a_N \end{cases}$

Αν θέσουμε $n=N+s$ έχουμε: $\forall n>N$ $a_n>2^n\boxed{\frac{a_N}{2^N}}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$
$\Rightarrow a_n\to+\infty) \Rightarrow \sum a_k$ αποκλίνει (θα έπρεπε $a_k\to 0$).

(8) Αν $a_k\to 0$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ συγκλίνει

ΛΑΘΟΣ: $a_k=\frac{(-1)^k}{k}\to 0$ $\left(|a_k|=\frac{1}{k}\to 0\right)$

Έχουμε: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, που αποκλίνει.

[Παρατήρηση: Γι' αυτήν την (a_k), $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\dots\right)$ συγκλίνει]

(9) Αν $a_k>0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum\sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: $a_k=\frac{1}{k^2}$

Η $\sum a_k=\sum\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, αλλά η $\sum\sqrt{a_k}=\sum\sqrt{\frac{1}{k^2}}=\sum\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

[Σημείωση: Γενικά, $\sum a_k$ συγκλίνει $(a_k>0)\Rightarrow a_k\to 0$ $(a_k>0)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ "τελικά" $0<a_k<1\Rightarrow a_k<\sqrt{a_k}$ τελικά]

$0<x<1\Rightarrow x<\sqrt{x}$, $x>1\Rightarrow\sqrt{x}<x$

(?)

(10) Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)^2 = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

[Σημείωση: Το (?) θα το δούμε (κριτήριο Leibniz):
Αν $a_k \downarrow 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ συγκλίνει.]

(12) Αν $a_k > 0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

ΣΩΣΤΟ: Αφού $\sum a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow a_k \to 0 \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \ 0 \leq a_k < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall k \geq k_0 \ 0 < a_k^2 < a_k$

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει, γιατί $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

Αλλιώς:

$\frac{a_k^2}{a_k} = a_k \to 0$ (γιατί $\sum a_k$ συγκλίνει)

$\sum a_k$ συγκλίνει

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

(11) Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει και (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_k), τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει, όμως η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-2}}{2k-1} =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει.

Θεωρούμε τις $b_k = \frac{1}{2k-1}$, $\gamma_k = \frac{1}{k}$

Ξέρουμε ότι η $\sum \gamma_k$ αποκλίνει και $\frac{b_k}{\gamma_k} = \frac{k}{2k-1} \to \frac{1}{2} > 0$.

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς έχουμε:

$\sum b_k = \sum \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει.

Ασκήσεις

22 Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η Σa_k, όπου:

(a) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ / $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Λύση: $a_k = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \longrightarrow 0$

Θεωρώ την $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, ξέρω ότι η $\Sigma b_k = \Sigma \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει (p-σειρά με $p = \frac{1}{2} < 1$) και $\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

Άρα η Σa_k συμπεριφέρεται σαν την Σb_k, δηλαδή αποκλίνει.

Αλλιώς:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$
$= \sqrt{n+1} - 1 \longrightarrow +\infty$

(b) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$ / $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{1+k^2} - k)$

Λύση: $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \frac{(1+k^2) - k^2}{(\sqrt{1+k^2} + k)} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2} + k}$

Παίρνω $b_k = \frac{1}{k}$

Έχω $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2} + k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

Αφού η $\Sigma b_k = \Sigma \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η Σa_k αποκλίνει, από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς.

(c) $a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$ / $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

Λύση: $a_k = \frac{1}{k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}$

Θεωρώ την $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$

Ξέρω ότι Σb_k συγκλίνει (p-σειρά με $p = \frac{3}{2} > 1$)

και $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

Άρα η Σa_k συμπεριφέρεται σαν την Σb_k, δηλαδή αποκλίνει.

(d) $a_k = (\sqrt[k]{k}-1)^k$ / $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$

Λύση: $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{(\sqrt[k]{k}-1)^k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 1-1 = 0 < 1$.

Από κριτήριο ρίζας η Σa_k συγκλίνει.

$\square$

$\boxed{23}$ Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 k}{k^2}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Λύση:

(a) Θεωρώ την $b_k = \frac{1}{k^2}$.

Η $\Sigma b_k = \Sigma \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει (p-σειρά, $p=2>1$) και

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^3+k^2\sqrt{k}}{2k^3-1} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{k}}}{2-\frac{1}{k^3}} \longrightarrow \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2} > 0$$

Άρα, η Σa_k συμπεριφέρεται σαν την $\Sigma b_k = \Sigma \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει.

(b) $a_k = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0$

$k \geq 1 \Rightarrow \sqrt[k]{k} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[k]{k} - 1 \geq 0 \Rightarrow a_k \geq 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Σκέψη: } \sqrt[k]{k} - 1 = \theta_k \Rightarrow \sqrt[k]{k} = 1+\theta_k \Rightarrow k = (1+\theta_k)^k \\ \text{Επίσης, } 3 > e > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k. \end{array} \right\}$

Για $k \geq 3$ έχουμε: $(1+\theta_k)^k = k \geq 3 > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \Rightarrow \forall k \geq 3$ $1+\theta_k > 1+\frac{1}{k}$, δηλαδή $\theta_k = \sqrt[k]{k} - 1 > \frac{1}{k}$.

Όμως η $\Sigma \frac{1}{k}$ αποκλίνει, άρα και η $\Sigma(\sqrt[k]{k}-1)$ αποκλίνει.

(c) $|\sigma\upsilon\nu\kappa| \leq 1 \Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall k$ και η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.
Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum a_k$ συγκλίνει (απολύτως).

(d) $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{k!\,\cancel{(k+1)}\,k^k}{k!\,\cancel{(k+1)}(k+1)^k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

□

24 Εξετάστε τις σειρές ως προς τη σύγκλιση:
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (1+\frac{1}{k})^{-k^2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p, p>0$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

Λύση
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (1+\frac{1}{k})^{-k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^{k^2}}$

$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$
Από κριτήριο ρίζας, η σειρά συγκλίνει.

Σε περίπτωση "ρητής" ακολουθίας, με κριτήριο λόγου, βγάζουμε 1.

(b) 1ος τρόπος:
Η $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ είναι φθίνουσα στο $(2,+\infty)$ $\left((\frac{\ln x}{x^2})' = \frac{1-2\ln x}{x^3} < 0, \ x > \sqrt{e} \right)$
$\Rightarrow$ η $\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)_{k=2}^{\infty} \downarrow$
Άρα, μπορώ να εφαρμόσω το κριτήριο συμπύκνωσης.
Κοιτάζω την $\sum_{k=10}^{\infty} 2^k \frac{\ln(2^k)}{(2^k)^2} = \ln 2 \cdot \sum_k \frac{k}{2^k}$
Κριτήριο λόγου για την $b_k = \frac{k}{2^k}$.
$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$.
Άρα, η $\sum 2^k \frac{\ln(2^k)}{(2^k)^2}$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{συμπύκνωσης}]{\text{κριτήριο}}$ η $\sum \frac{\ln k}{k^2}$ συγκλίνει.
2ος τρόπος:
"Ο λογάριθμος $\ln x$ πηγαίνει στο άπειρο (όταν $x \to +\infty$) πιο αργά από οποιαδήποτε δύναμη x^a, $a>0$ του x".
Δηλαδή, $\forall a>0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ $\left(\frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a x^a} \to 0 \right) \Rightarrow \exists M = M_a : \forall x \geq M \ \ln x < x^a$.

Υπάρχει κ_0: $\forall \kappa \geq \kappa_0$ $\ln \kappa < \sqrt{\kappa}$

Άρα, $\forall \kappa \geq \kappa_0$ $\frac{\ln \kappa}{\kappa^2} < \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa^{3/2}}$

Όμως, η $\sum \frac{1}{\kappa^{3/2}}$ συγκλίνει.

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum \frac{\ln \kappa}{\kappa^2}$ συγκλίνει.

(c) $\sqrt[\kappa]{a_\kappa} = \sqrt[\kappa]{p^\kappa \cdot \kappa^p} = \sqrt[\kappa]{p^\kappa} \cdot \sqrt[\kappa]{\kappa^p} = p\left(\sqrt[\kappa]{\kappa}\right)^p \longrightarrow p \cdot 1^p = p.$

Αν $p<1$, η σειρά συγκλίνει (κριτήριο ρίζας)

Αν $p>1$, η σειρά αποκλίνει (κριτήριο ρίζας)

Για $p=1$ έχουμε την $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ ($\kappa \not\to 0$)

(d) [Δεν είναι p-σειρά: $\frac{1}{\kappa^{1+\frac{1}{\kappa}}} = \frac{1}{\kappa^{p_\kappa}}$, όπου $p_\kappa > 1$, αλλά το p_κ εξαρτάται από το κ (δεν είναι σταθερό).]

$\frac{1}{\kappa^{1+\frac{1}{\kappa}}} = \frac{1}{\kappa \sqrt[\kappa]{\kappa}}$

Θεωρώ την $b_\kappa = \frac{1}{\kappa}$.

Ξέρω ότι η $\sum b_\kappa = \sum \frac{1}{\kappa}$ αποκλίνει

Επίσης, $\frac{a_\kappa}{b_\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa \cdot \sqrt[\kappa]{\kappa}} = \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\kappa}} \to \frac{1}{1} = \underline{1>0}$

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η $\sum a_\kappa = \sum \frac{1}{\kappa^{1+\frac{1}{\kappa}}}$ αποκλίνει.

$\square$

$\boxed{30}$ Έστω $a_\kappa > 0$, $\kappa \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι: $\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa^2 = b_\kappa$, $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{a_\kappa}{1+a_\kappa} = \gamma_\kappa$, $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{a_\kappa^2}{1+a_\kappa^2} = \delta_\kappa$ συγκλίνουν.

<u>Λύση:</u>

- $\frac{b_\kappa}{a_\kappa} = \frac{a_\kappa^2}{a_\kappa} = a_\kappa \to 0$ γιατί η $\sum a_\kappa$ συγκλίνει.

  Από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum b_\kappa = \sum a_\kappa^2$ συγκλίνει.

- $\frac{\gamma_\kappa}{a_\kappa} = \frac{a_\kappa}{a_\kappa(1+a_\kappa)} = \frac{1}{1+a_\kappa} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1$ + Οριακό κριτήριο σύγκρισης

- $\frac{\delta_\kappa}{a_\kappa} = \frac{a_\kappa^2}{a_\kappa(1+a_\kappa^2)} = \frac{a_\kappa}{1+a_\kappa^2} \longrightarrow \frac{0}{1+0^2} = 0$ + Οριακό κριτήριο σύγκρισης $\square$

ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ
$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$
$\alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ $(\alpha,\beta\ge 0)$

31 $a_k \ge 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.
Δείξτε ότι:
(i) η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει
(ii) αν $(a_k)\downarrow$, ισχύει και το αντίστροφο.

Λύση

(i) Έχουμε $b_k = \sqrt{a_k a_{k+1}} \le \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$
Όμως, οι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν.
Άρα, $\sum \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ συγκλίνει.
Από κριτήριο σύγκρισης θα συγκλίνει και η $\sum b_k$

(ii) Αν $a_k\downarrow$, $a_k \ge 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει, τότε
$\forall k \ge 1$ έχουμε $\sqrt{a_k a_{k+1}} \overset{(a_k)\downarrow}{\ge} \sqrt{a_{k+1} a_{k+1}} = a_{k+1}$.
Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. $\square$

32 $a_k \ge 0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Λύση

$$\frac{\sqrt{a_k}}{k} = \sqrt{a_k \cdot \frac{1}{k^2}} \le \frac{a_k + \frac{1}{k^2}}{2}$$

Η $\sum a_k$ συγκλίνει και η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + \frac{1}{k^2}}{2}$ συγκλίνει.
Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Άλλος τρόπος:
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \cdot \frac{1}{k} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \le \sqrt{M} \cdot \sqrt{A},$$ διότι
$\sum a_k = M < \infty$ και $\sum \frac{1}{k^2} = A < \infty$
Άρα, η (s_n) είναι άνω φραγμένη από $\sqrt{M}\cdot\sqrt{A} \Rightarrow s_n \to s \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει. $\square$

Παρατηρήσεις για τη σύγκλιση σειρών

1 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $(m \in \mathbb{N})$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$t_r = a_{m+1} + \dots + a_{m+r}$

Ισχύει: αν $n > m$ τότε $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \underbrace{a_{m+1} + \dots + a_n}$

$= (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + t_{n-m}$

$(\Rightarrow)$ $\sum a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow s_n \to s \Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + t_{n-m} \to s$

$\Rightarrow t_{n-m} \xrightarrow[n\to\infty]{} s - (a_1 + a_2 + \dots + a_m)$

Άρα, η $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον $s - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - (a_1 + \dots + a_m)$

Δηλαδή, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + \dots + a_m) + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$

$(\Leftarrow)$ Όμοια.

2 Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει και αλλάξω πεπερασμένους σε πλήθος όρους της (a_k) τότε η νέα σειρά συγκλίνει.

Αν το $\{k : b_k \neq a_k\}$ πεπ. τότε η $\sum b_k$ συγκλίνει.

Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$: $\forall k > m$ $a_k = b_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και $\sum b_k$ συγκλίνει. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{=s} + \mu \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}_{=t}$

$s_n = a_1 + \dots + a_n \to s$

$t_n = b_1 + \dots + b_n \to t$

$z_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(a_1 + \dots + a_n) + \mu(b_1 + \dots + b_n) = \lambda s_n + \mu t_n \to \lambda s + \mu t.$