①

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 8ο (09-05-2014)

Ορισμός (απόλυτη σύγκλιση)

Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Πρόταση

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ συγκλίνει απολύτως

(διότι: $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει) $\overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow}$ η $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει.

(β) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}_{a_k}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Όμως η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει: Θα δείξουμε ότι η (s_{2n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

Πράγματι, $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{>0} > s_{2n}$

Επίσης, $s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

$$< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{M}$$

Άρα, $\exists s \in \mathbb{R}: s_{2n} \to s$

Τότε, $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n} \to s - 0 = s$ (διότι $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$).

Έπεται ότι $s_n \to s \underset{\text{ορ.}}{\Longrightarrow} \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει στον s.

Ορολογία:

Μια σειρά που συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, λέγεται: συγκλίνουσα υπό συνθήκη.

1 Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι $\exists M > 0 : \forall k \in \mathbb{N}\ |a_k| \leq M \cdot b_k$

Αν η $\sum b_k$ συγκλίνει τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Απόδειξη

Ορίζουμε: $s_n = |a_1| + \ldots + |a_n|$ και $t_n = b_1 + \ldots + b_n$

Αφού η $\sum b_k$ συγκλίνει, $\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ t_n \leq A$.

Τότε $s_n = |a_1| + \ldots + |a_n| \leq M \cdot b_1 + \ldots + M \cdot b_n = M(b_1 + \ldots + b_n) = M \cdot t_n \leq M \cdot A \Rightarrow$

$$s_n \leq M \cdot A$$

Αφού η $\sum |a_k|$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα ($s_n \leq M \cdot A\ \forall n$) συγκλίνει.

Άρα συγκλίνει και η $\sum a_k$. ■

2 Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$ και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν η $\sum b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει (άρα και η $\sum a_k$).

Απόδειξη

Αφού η $\frac{a_k}{b_k}$ συγκλίνει, είναι φραγμένη.

Δηλαδή, $\exists M > 0 : \forall k \in \mathbb{N}\ \frac{|a_k|}{b_k} = \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M \Rightarrow$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |a_k| \leq M \cdot b_k$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε το Κριτήριο Σύγκρισης. ■

Παραδείγματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2+800k+1.000.000}{k^4+1}}_{=a_k}$$

Ορίζουμε $b_k=\frac{1}{k^2}$.

Τότε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{k^4+800k^3+1.000.000k^2}{k^4+1}\longrightarrow 1$

Αφού το $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=1\in\mathbb{R}$ και η $\sum b_k=\sum\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει τότε από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως.

$\boxed{3}$ Κριτήριο Ισοδύναμης Συμπεριφοράς

Έστω $a_k>0$, $b_k>0$ και $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\delta>0$

Τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ η $\sum b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Αφού $\frac{a_k}{b_k}\to\delta>0$ (1), έχουμε $\frac{b_k}{a_k}=\frac{1}{\frac{a_k}{b_k}}\to\frac{1}{\delta}$ (ΑΠΙ) (2)

Τότε: (a) αν η $\sum a_k$ συγκλίνει, αφού από τη (2) $\frac{b_k}{a_k}\to\frac{1}{\delta}\in\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε (από οριακό κριτήριο) ότι η $\sum b_k$ συγκλίνει.

(b) αν η $\sum b_k$ συγκλίνει, αφού $\frac{a_k}{b_k}\to\delta$, η $\sum a_k$ συγκλίνει πάλι από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. ∎

Παράδειγμα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\eta\mu\frac{1}{k}}_{=a_k}$$

Θεωρούμε την $b_k=\frac{1}{k}$

Έχουμε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{\eta\mu\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}1>0$ (διότι $\frac{1}{k}\to0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$)

Από το Κριτήριο Ισοδύναμης Συμπεριφοράς η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta\mu\frac{1}{k}$ "συμπεριφέρεται σαν την" $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

$\boxed{4}$ Κριτήριο Λόγου

Έστω (a_k) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

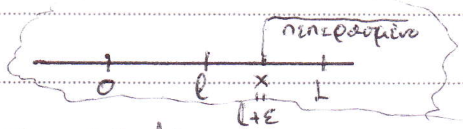
(a) Αν $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, τότε η Σa_k συγκλίνει απολύτως
(αρκεί να υποθέσουμε ότι $\limsup \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$).

(b) Αν $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$, τότε η Σa_k αποκλίνει
(αρκεί $\liminf \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$)

(c) Αν $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1$, δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

Απόδειξη

(a) Έχουμε $\limsup \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell < 1$



Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $x = \ell + \varepsilon < 1$

Από χαρακτηρισμό του limsup το $\{k \in \mathbb{N} : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > x = \ell + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Άρα $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N$ $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq x \Rightarrow |a_{k+1}| \leq |a_k| \cdot x$

Έχουμε: $|a_{N+1}| \leq x|a_N|$

$|a_{N+2}| \leq x|a_{N+1}| \leq x^2 |a_N|$

$|a_{N+s}| \leq x^s |a_N|$ $\forall s = 1, 2, \ldots$

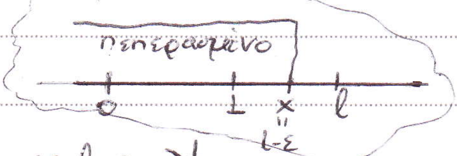
Θέτοντας $k = N + s$ $\forall k > N$, έχουμε:

$|a_k| \leq x^{k-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{x^N} \cdot x^k = M \cdot x^k$

Η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ συγκλίνει (γεωμετρική σειρά και $x < 1$)

Από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

(b) Υποθέτουμε ότι $\liminf \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell > 1$



Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $x = \ell - \varepsilon > 1$.

Από χαρακτηρισμό liminf $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N$ $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq x > 1 \Rightarrow \forall k \geq N$ $|a_{k+1}| > |a_k|$

Τότε $0 < |a_N| < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \ldots$

Άρα $|a_k| \not\to 0 \Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow \Sigma a_k$ αποκλίνει.

(c) • $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$

• $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \to 1$ ■

$\boxed{5}$ Κριτήριο Ρίζας

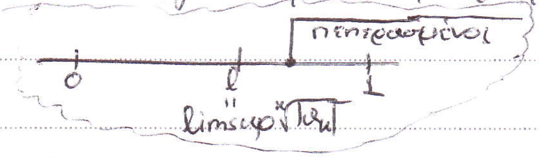
Έστω $a_k \in \mathbb{R}$.

(a) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.

(b) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η $\sum |a_k|$ αποκλίνει.

(c) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

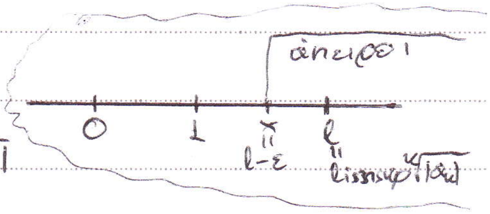
Απόδειξη



(a) Βρίσκουμε x: $l < x < 1$ και τότε

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall k \geq N \ \sqrt[k]{|a_k|} \overset{l+\varepsilon}{\leq} x \Rightarrow \forall k \geq N \ |a_k| \leq x^k$

Αφού $x < 1$, η $\sum_{k=N}^{\infty} x^k$, συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.



(b) Βρίσκουμε x: $1 < x < l$.

Στο $(x, +\infty)$ υπάρχουν άπειροι όροι της $\sqrt[k]{|a_k|}$

$\Leftrightarrow \exists (k_n) \nearrow : \forall n \ \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > x > 1 \Rightarrow |a_{k_n}| > 1$.

Τότε $a_k \not\to 0$ (αλλιώς θα έχουμε $a_{k_n} \to 0$ ενώ $|a_{k_n}| > 1$)

Συνεπώς, η $\sum a_k$ αποκλίνει.

(c) • $a_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$ και $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει

• $a_k = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \to 1$ και $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. ■

Ερωτήσεις κατανόησης (Σ/Λ)

(1) Αν $a_k \to 0$ τότε η $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη.

ΛΑΘΟΣ: $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, αλλά $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty$.

(2) Αν η (s_n) είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: Αν $a_k = (-1)^{k-1}$, δηλαδή έχουμε την ακολουθία $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \\ s_2 &= 1 + (-1) = 0 \\ s_3 &= s_2 + a_3 = 0 + 1 = 1 \\ s_4 &= s_3 + a_4 = 1 + (-1) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad s_n = \begin{cases} 1, & n = \text{περιττός} \\ 0, & n = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Η (s_n) είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum a_k$ αποκλίνει.

(3) Αν $|a_k| \to 0$, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως.

ΛΑΘΟΣ: $a_k = |a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και $\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k} = +\infty$.

(4) Αν η $\sum |a_k|$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει.

ΣΩΣΤΟ: Αν $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $t_n = |a_1| + \dots + |a_n|$, τότε για $m > n$ $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = |t_m - t_n| < \varepsilon$, για μεγάλα m, n, διότι (t_n) βασική.

(5) Αν $a_k > 0$ και $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ $\forall k$, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ: $a_k = \frac{1}{k} > 0$, $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ $\forall k$ και η $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.