1

Έκτακτο μάθημα
Σάββατο 10-05-2014
ώρα: 10:30-13:30

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 6ο (02-05-2014)

Σειρές πραγματικών αριθμών

Πρόβλημα:
Μας δίνουν μια ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών και θέλουμε να ορίσουμε και να υπολογίσουμε (αν γίνεται) το άθροισμά τους.

Θεωρούμε την ακολουθία $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$
Η (s_n) ορίζεται καλά. Λέμε ότι ο s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της "σειράς των a_k", την οποία συμβολίζουμε με $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Η ακολουθία (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s και γράφουμε $\boxed{s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$.

Παραδείγματα:

(a) Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
Υπολογίζουμε το $s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{αν } x = 1 \\ \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{αν } x \neq 1 \end{cases}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} s_n$.

- $x = 1$ / Τότε, $s_n = n \to +\infty$ (τότε γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} 1^{k-1} = +\infty$ και λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$)
- $x \neq 1$ / Τότε, $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$. Αν $|x| < 1$ τότε $x^n \to 0 \Rightarrow s_n \to \frac{1}{1-x}$
  Αν $|x| > 1$ τότε $|s_n| = \frac{|x^n - 1|}{|x-1|} \geq \frac{|x|^n - 1}{|x-1|} \to +\infty$
  Δηλαδή, η (s_n) αποκλίνει
- $x = -1$ / $s_{2k-1} = 1$, $s_{2k} = 0$

Συμπέρασμα: Αν $|x| < 1$ τότε: $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$

$\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$= (1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}) + (\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}) + (\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}) + \dots + (\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}) =$

$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

Έχουμε $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Η (s_n) είναι γνησίως αύξουσα (διότι $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$).

Θα δείξουμε ότι η (s_n) είναι άνω φραγμένη.

Τότε, $\exists\, s \in \mathbb{R}: s_n \nearrow s$ και θα έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει στον s.

Έχουμε: $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$

$= 1 + (1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}) + (\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}) + (\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}) + \dots + (\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \tfrac{1}{n}) =$

$= 2 - \frac{1}{n} < 2$.

Άρα, η (s_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη απ'το 2,

$\Rightarrow s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s \le 2$.

Πρόταση 1

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε $a_k \to 0$

[Χρησιμεύει και σαν κριτήριο απόκλισης: αν $a_k \not\to 0$, τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει].

Απόδειξη

$\boxed{1^{\eta}}$ Για κάθε $n > 1$ έχουμε $s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει σε κάποιον $s \in \mathbb{R}$ έχουμε $s_n \to s$

Τότε, $s_{n-1} \to s$ (*)

Άρα, $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$. ■

(*) <u>Γιατί "$s_{n-1} \to s$";</u>

Η (s_{n-1}) είναι η ακολουθία (t_n) με:

$t_1 = 0$ (βάζω ό,τι θέλω)

$t_2 = s_1$

$t_3 = s_2$

⋮

$t_n = s_{n-1}$, $n > 1$.

Μπορώ να δείξω ότι $t_n \to s$.

Αν $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $|s_n - s| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0 + 1$ $|s_{n-1} - s| < \varepsilon$.

Άρα $t_n \to s$.

Τότε $s_n - t_n \to s - s = 0$

Όμως για $n \geq 2$ έχουμε $s_n - t_n = s_n - s_{n-1} = a_n$

$\Big\}\ a_n \to 0$.

$\boxed{2^{\eta}}$ Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού $s_n \to s$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $n_1 = n_0 + 1$.

Αν $n \geq n_1$ τότε $n \geq n_0$ και $n - 1 \geq n_0$ $\Big\} \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|s_{n-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

<u>Πρόταση 2</u>

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει <u>αν και μόνο αν</u> η ακολουθία (s_n) των μερικών της αθροισμάτων είναι βασική.

Δηλαδή, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: "αν $m > n \geq n_0$, τότε $|s_m - s_n| < \varepsilon$".

Ισοδύναμα, "αν $m > n \geq n_0$, τότε $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$".

Παράδειγμα

Η <u>αρμονική σειρά</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ αποκλίνει στο $+\infty$ παρόλο που $a_k = \frac{1}{k} \to 0$ (αυτό δείχνει ότι το αντίστροφο της Πρότασης 1 δεν ισχύει).

Απόδειξη (μία από πολλές)

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει, τότε η $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ είναι <u>βασική</u> (από την Πρόταση 2).

Είχαμε δει στις ασκήσεις του Κεφ. 1 ότι

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{4}$ και αν υποθέσουμε ότι η (s_n) είναι βασική έχουμε: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq n_0 \quad |s_m - s_n| < \frac{1}{4}$.

Τότε, για $n \geq n_0$ και $m = 2n$ έχουμε:

$$\frac{1}{4} > |s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{άτοπο.} \quad \blacksquare$$

Σκοπός του κεφαλαίου:

Να διατυπώσουμε (και να δείξουμε) κριτήρια με βάση τα οποία, αν μας δίνουν μια σειρά $\sum a_k$ να μπορούμε να πούμε αν <u>συγκλίνει ή όχι</u>.

(A) Σειρές με μη-αρνητικούς όρους

Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

[<u>Βασική παρατήρηση:</u> Τότε η (s_n) είναι αύξουσα $(s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1})$]

Τότε: (1) ή η (s_n) είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow s_n \to s \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η $\sum a_k$ συγκλίνει,

(2) ή η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow s_n \to +\infty \Rightarrow$ η $\sum a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Πρόταση 3

Αν $a_k \ge 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \exists M>0 : \forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n \le M$.
(π.χ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει γιατί $\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}_{s_n} \le \underset{M}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$)
(π.χ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, αφού $1+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{n^3} \le 1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \le 2$).

Πρόταση 4 (κριτήριο συμπύκνωσης (Cauchy) για φθίνουσες ακολουθίες $a_k \ge 0$).

Αν $a_k \downarrow 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.
Δηλαδή, η $a_1+a_2+a_3+a_4+\dots$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $a_1+2a_2+4a_4+8a_8+16a_{16}+\dots$ συγκλίνει.

Βασική εφαρμογή (του κριτηρίου)

Έστω $p>0$. Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k^p} \downarrow 0$.
Θα εξετάσουμε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει.
Με βάση την Πρόταση 4 μπορούμε ισοδύναμα να εξετάσουμε αν συγκλίνει η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p}$.

Έχουμε $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{p-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
(1) Αν $0<p<1$ τότε $2^{p-1} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} \ge 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k \not\to 0$
Από Π.1, η σειρά αποκλίνει.
(2) Αν $p>1$ τότε $2^{p-1}>1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$.

Αρμονική σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{2^k} \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}}$ συγκλίνει το οποίο δεν ισχύει. Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.