Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 12ο (16-05-2014)

Δυναμοσειρές

Έστω $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ λέγεται δυναμοσειρά (με συντελεστές a_k).

Το ερώτημα είναι: για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει και για ποιες αποκλίνει;

Για $x=0$ έχουμε: $a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0$, δηλαδή κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=0$.

Παραδείγματα (άσκηση 19)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^{k+1} |x|^{k+1}}{k^k |x|^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k |x| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty \quad (\text{αν } x\neq 0)$$

Αποκλίνει για κάθε $x \neq 0$.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} = \frac{1}{k+1}|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1 \quad (\forall x \neq 0)$$

Συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot |x| = |x|$$

- Αν $|x|<1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.
- Αν $|x|>1$, τότε η σειρά αποκλίνει.
- Για $x=1$, έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, η οποία συγκλίνει.
- Για $x=-1$, έχουμε τη $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, η οποία συγκλίνει απολύτως.

Το σύνολο σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1]$

↳ τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δοσμένη δυναμοσειρά συγκλίνει.

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}|x|^k} = \frac{(\sqrt[k]{k})^3}{3}|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3}|x|$.

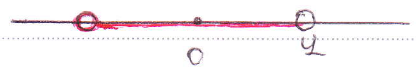
- Αν $|x|<3$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.
- Αν $|x|>3$, τότε η σειρά αποκλίνει.
- Για $x=3$, έχουμε τη $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{\cancel{3^k}} \cdot \cancel{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^3$ – αποκλίνει ($k^3 \to \infty$)
- Για $x=-3$, έχουμε τη $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}(-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k^3$ – αποκλίνει ($(-1)^k k^3 \not\to 0$)

Σύνολο σύγκλισης: $(-3,3)$

Λήμμα

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μία δυναμοσειρά.

(i) Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \neq 0$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει.
Αν $|x|<|y|$, τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.



(ii) Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $z \neq 0$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ αποκλίνει.
Αν $|x|>|z|$, τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει.

Απόδειξη

(i) Γράφουμε: $|a_k x^k| = \underbrace{|a_k y^k|}_{\text{φραγμένη}} \cdot \underbrace{\left|\frac{x}{y}\right|^k}_{\omega<1}$

- Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε:
  $a_k y^k \longrightarrow 0 \Rightarrow (a_k y^k)$ φραγμένη $\Rightarrow \exists M>0: \forall k\in\mathbb{N}\ |a_k y^k| \le M$.

- Άρα, $|a_k x^k| \le M\left|\frac{x}{y}\right|^k \quad \forall k\in\mathbb{N}$
  Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει (γεωμ. σειρά με λόγο $\left|\frac{x}{y}\right|<1$)

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum|a_k x^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως

(ii) Αν η $\sum a_k x^k$ συνέκλινε, τότε, αφού $|z|<|x|$, από το (i) θα είχαμε ότι η $\sum a_k z^k$ συγκλίνει απολύτως, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης. ■

<u>Πρόταση</u>

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά.

Ορίζουμε $R = \sup \underbrace{\{|x| : x \in \mathbb{R}, \text{ η } \sum a_k x^k \text{ συγκλίνει}\}}_{A}$

Τότε, η $\sum a_k x^k$ <u>συγκλίνει</u> απολύτως $\forall y \in (-R, R)$ και <u>αποκλίνει</u> για $y \notin [-R, R]$.

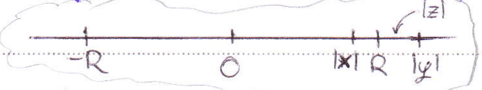
- Δηλαδή, το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι: το $(-R, R)$ ή το $[-R, R]$ ή το $[-R, R)$ ή το $(-R, R]$.

<u>Σημείωση:</u>

Αν $R = +\infty \Rightarrow$ σύνολο σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$.

Αν $R = 0 \Rightarrow$ σύνολο σύγκλισης είναι το $\{0\}$.

<u>Απόδειξη</u> (Θα δούμε μόνο την περίπτωση $0 < R < +\infty$)



• Έστω ότι $|x| < R$

Αφού $R = \sup A$ και $|x| < \sup A = R$, $\exists z \in \mathbb{R}$: η $\sum a_k z^k$ συγκλίνει και $|x| < |z|$.

Από το Λήμμα (i) η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

• Έστω ότι $|y| > R$

Έστω ότι η $\sum a_k y^k$ συγκλίνει.

Τότε, $|y| \in A \Rightarrow |y| \le \sup A \Rightarrow |y| \le R$

Άτοπο, διότι $|y| > R$. ■

- Ο αριθμός R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
- Ερώτημα: πώς τον βρίσκουμε;

Πρόταση 1

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά.

Αν $a = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$, τότε $R = \frac{1}{a}$.

Απόδειξη

Αν $|x| < \frac{1}{a}$, τότε: $\limsup \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \limsup(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x|) = |x| \cdot \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = |x| \cdot a < 1$.

Από το κριτήριο ρίζας η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

Αν $|x| > \frac{1}{a}$, τότε $\limsup \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| a > 1 \Rightarrow$ η $\sum a_k x^k$ αποκλίνει.

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $\frac{1}{a}$. ∎

Πρόταση 2

Αν $\exists \lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum a_k x^k$ είναι $R = \frac{1}{a}$.

Παραδείγματα

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ / $a_k = 1$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{1} = 1 \to 1 = a$, άρα $R = \frac{1}{a} = 1$ / $(-1, 1)$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ / $a_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k+1})^2} \longrightarrow 1 = a$, άρα $R = \frac{1}{a} = 1$ / $[-1, 1]$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ / $a_k = \frac{1}{k+1}$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \longrightarrow 1 = a$, άρα $R = \frac{1}{a} = 1$ / $[-1, 1]$

Ασκήσεις

$\boxed{34}$ Έστω $a_k \downarrow 0$ και η $\sum a_k$ αποκλίνει.

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\min\{a_k, \frac{1}{k}\}}_{b_k} = +\infty$

Λύση

Η (b_k) είναι φθίνουσα:

$$b_{k+1} = \min\left\{a_{k+1}, \frac{1}{k+1}\right\} \begin{cases} \le a_{k+1} \le a_k \\ \le \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow b_{k+1} \le \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = b_k$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \min\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\}$, από κριτήριο συμπύκνωσης.

Έχουμε $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \min\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \min\{2^k a_{2^k}, 1\} \to 0 \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \ge k_0 \ \min\{2^k a_{2^k}, 1\} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \ge k_0 \ \ 2^k a_{2^k} = \min\{2^k a_{2^k}, 1\} < 1$.

Τότε, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\} = \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Άτοπο.

Άλλος τρόπος:

Αν συγκλίνει, τότε, αφού $(b_k)\downarrow$, από την Άσκηση 29, έχουμε $k b_k \to 0$

$\Rightarrow k \min\{a_k, \frac{1}{k}\} \to 0 \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \ge k_0 \ \min\{a_k, \frac{1}{k}\} < \frac{1}{k} \Rightarrow \forall k \ge k_0 \ \min\{a_k, \frac{1}{k}\} = a_k$

Άτοπο, αφού $\sum a_k$ αποκλίνει. □

38 Έστω $a_k > 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει

Λύση

Έχουμε $a_k^{\frac{k}{k+1}} < 2a_k$, αν $1 < 2a_k^{\frac{1}{k+1}}$, δηλαδή, αν $a_k^{\frac{1}{k+1}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_k > \frac{1}{2^{k+1}}$

Αν $a_k \le \frac{1}{2^{k+1}}$, τότε $a_k^{\frac{k}{k+1}} \le \frac{1}{(2^{k+1})^{\frac{k}{k+1}}} = \frac{1}{2^k}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } a_k > \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ τότε } a_k^{\frac{k}{k+1}} < 2a_k \\ \text{Αν } a_k \le \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ τότε } a_k^{\frac{k}{k+1}} \le \frac{1}{2^k} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \ 0 < a_k^{\frac{k}{k+1}} \le 2a_k + \frac{1}{2^k}$$

Όμως, η $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2a_k + \frac{1}{2^k}\right)$ συγκλίνει ως γραμμικός συνδυασμός των συγκλινουσών $\sum a_k$, $\sum \frac{1}{2^k}$

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει. $\square$