Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 11ο (14-05-2014)

Ασκήσεις

Ε15 Αν οι $\sum a_k^2$ και $\sum \beta_k^2$ συγκλίνουν, τότε η $\sum a_k \beta_k$ συγκλίνει απολύτως. ($a_k, \beta_k \in \mathbb{R}$)

Λύση

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||\beta_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2}}_{M}$$

Αφού η $\sum |a_k||\beta_k|$ έχει μερικά αθροίσματα φραγμένα (από M) και μη αρνητικούς όρους, συγκλίνει.

Άλλος τρόπος:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |a_k \beta_k| \leq \frac{|a_k|^2 + |\beta_k|^2}{2} = \frac{a_k^2 + \beta_k^2}{2}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k^2 + \beta_k^2}{2} \right)$ συγκλίνει γιατί οι $\sum a_k^2$, $\sum \beta_k^2$ συγκλίνουν.

Από κριτήριο σύγκρισης, συγκλίνει. □

Ε16 Έστω $a_k \in \mathbb{R}$.

Αν η $\sum a_k^2$ συγκλίνει και αν $p > \frac{1}{2}$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως

Λύση

Εφαρμογή της προηγούμενης:

Αν θέσουμε $\beta_k = \frac{1}{k^p}$, τότε η $\sum \beta_k^2 = \sum \frac{1}{k^{2p}}$ συγκλίνει, γιατί $2p > 1 \Rightarrow$ η $\sum a_k \beta_k = \sum \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως. □

E12 (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^6}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$ (d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^1}$ (e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$
(f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ (g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ (h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}$ (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^p}\right), p>0$

Λύση

(a) Αν $k>2$, τότε $\ln k \geq \ln 3 > 1 \Rightarrow \frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} > 0$
Αφού η $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.
Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ αποκλίνει.

(b) Η $\frac{1}{(\ln k)^6} \downarrow 0$, άρα μπορώ να εφαρμόσω κριτήριο συμπύκνωσης:
$$\sum \frac{2^k}{(\ln 2^k)^6} = \frac{1}{(\ln 2)^6} \sum \frac{2^k}{k^6}$$
Όμως, $\frac{2^k}{k^6} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum \frac{2^k}{k^6}$ αποκλίνει $\Longrightarrow \sum \frac{1}{(\ln k)^6}$ αποκλίνει.

Άλλος τρόπος:
Υπάρχει k_0: $\forall k \geq k_0$ $(\ln k)^6 < k \Rightarrow \forall k \geq k_0$ $\frac{1}{(\ln k)^6} > \frac{1}{k}$.
Αφού η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^6}$.

(c) Η $\frac{1}{\ln k} \downarrow 0 \Rightarrow$ η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει.

(d)-(e) Τις κάνουμε μαζί θεωρώντας την $\sum \frac{1}{k(\ln k)^p}$, $p>0$.
Η $a_k = \frac{1}{k(\ln k)^p} \downarrow 0$
Κριτήριο συμπύκνωσης: έχει ισοδύναμη συμπεριφορά με την $\sum 2^k a_{2^k} = \sum 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum \frac{1}{k^p}$
Συγκλίνει αν $p>1$.
Αποκλίνει αν $p \leq 1$.

(f) Για την $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\ln k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$.
Από κριτήριο ρίζας, η σειρά συγκλίνει.

(g) Υπάρχει κ_0: $\forall \kappa \geq \kappa_0$ $\ln\kappa > e^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \kappa \geq \kappa_0$ $\frac{1}{(\ln\kappa)^{\ln\kappa}} < \frac{1}{(e^2)^{\ln\kappa}} = \frac{1}{e^{2\ln\kappa}} = \frac{1}{e^{\ln\kappa^2}} = \frac{1}{\kappa^2}$

Αφού η $\sum \frac{1}{\kappa^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum \frac{1}{(\ln\kappa)^{\ln\kappa}}$.

(h) Όμοια με (g):

Αφού $\ln\ln\kappa \xrightarrow[\kappa\to+\infty]{} +\infty$, $\exists \kappa_1 \in \mathbb{N}$: $\forall \kappa \geq \kappa_1$ $\ln\ln\kappa > e^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \kappa \geq \kappa_1$ $\frac{1}{(\ln\ln\kappa)^{\ln\kappa}} < \frac{1}{(e^2)^{\ln\kappa}} = \frac{1}{\kappa^2}$.

Αφού η $\sum \frac{1}{\kappa^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum \frac{1}{(\ln\ln\kappa)^{\ln\kappa}}$.

(i) [Παρατήρηση: $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$]

Άρα, αφού η $b_\kappa = \frac{1}{\kappa^p}$ έχει την ιδιότητα $\frac{a_\kappa}{b_\kappa} \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 1 > 0$, η $\sum a_\kappa$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum b_\kappa = \sum \frac{1}{\kappa^p}$.

Δηλαδή, συγκλίνει αν $p > 1$, αποκλίνει αν $p \leq 1$. □

$\boxed{\text{E18}}$ Για ποια a, b, γ συγκλίνει η $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^a \eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^b}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right)$, $a, b, \gamma > 0$;

<u>Λύση</u>

Έχουμε $a_\kappa = \kappa^a \eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^b}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right)$

Θεωρούμε την $b_\kappa = \kappa^a \cdot \frac{1}{\kappa^b} \cdot 1$

Έχουμε $\frac{a_\kappa}{b_\kappa} = \frac{\kappa^a}{\kappa^a} \cdot \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^b}\right)}{\frac{1}{\kappa^b}} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right)}{1} \xrightarrow[\kappa\to+\infty]{} 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(0) = 1$.

Διότι, $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$ και $\lim\limits_{z\to 0^+} \sigma\upsilon\nu z = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

$\left(y = \frac{1}{\kappa^b} \to 0^+\right)$ $\left(z = \frac{1}{\kappa^\gamma} \to 0^+\right)$

Άρα, η $\sum a_\kappa$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum b_\kappa = \sum \frac{1}{\kappa^{b-a}}$.

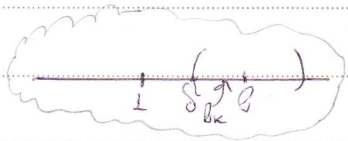
Συγκλίνει για εκείνες τις τριάδες (a, b, γ) με: $a, b, \gamma > 0$ και $b - a > 1$. □

E19 (a) Έστω (β_κ) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\beta_\kappa \to \beta > 1$.

Δείξτε ότι η $\sum \frac{1}{\kappa^{\beta_\kappa}}$ συγκλίνει.

(b) Έστω $\gamma_\kappa > 1$ $\forall \kappa$.

Είναι σωστό ότι η $\sum \frac{1}{\kappa^{\beta_\kappa}}$ συγκλίνει;



Λύση

(a) Αφού $\beta>1$ μπορούμε να βρούμε δ: $1<\delta<\beta$.

Αφού $\beta_\kappa\to\beta>\delta$ $\exists \kappa_0: \forall\kappa\ge\kappa_0 \;\; \beta_\kappa>\delta$

Τότε, $\forall \kappa\ge\kappa_0 \;\; \kappa^{\beta_\kappa} > \kappa^\delta \Rightarrow 0<\frac{1}{\kappa^{\beta_\kappa}}<\frac{1}{\kappa^\delta}$

Αφού $\delta>1$, η $\sum_{\kappa=\kappa_0}^{\infty} \frac{1}{\kappa^\delta}$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{σύγκρισης}]{\text{κριτήριο}}$ $\sum_{\kappa=\kappa_0}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{\beta_\kappa}}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{\beta_\kappa}}$ συγκλίνει.

(b) Λάθος!

Για την $\sum \frac{1}{\kappa^{\gamma_\kappa}} = \sum \frac{1}{\kappa^{1+\frac{1}{\kappa}}}$ έχουμε $\gamma_\kappa = 1+\frac{1}{\kappa}>1$ και

αποκλίνει, γιατί $\dfrac{\frac{1}{\kappa^{1+\frac{1}{\kappa}}}}{\frac{1}{\kappa}} = \dfrac{\kappa\cdot 1}{\kappa\sqrt[\kappa]{\kappa}} \longrightarrow 1>0$.

Συμπεριφέρεται σαν την αρμονική σειρά. □

37 Έστω (α_κ) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Δείξτε ότι: αν η $\sum\alpha_\kappa$ αποκλίνει, τότε η $\sum\kappa\alpha_\kappa$ αποκλίνει.

Λύση

{Αν είχα $\alpha_\kappa>0$ θα έλεγα απλώς $0<\alpha_\kappa\le\kappa\alpha_\kappa$ και η $\sum\alpha_\kappa$ αποκλίνει $\Rightarrow$ $\sum\kappa\alpha_\kappa$ αποκλίνει}

Θα δείξω ότι: αν η $\sum\kappa\alpha_\kappa$ συγκλίνει, τότε η $\sum\alpha_\kappa$ συγκλίνει (είναι ισοδύναμο).

Θέτοντας $\beta_\kappa=\kappa\alpha_\kappa$, θέλω (ισοδύναμα) να δείξω το εξής:

αν η $\sum \beta_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum \frac{\beta_k}{k}$ συγκλίνει.
Εφαρμόζουμε το κριτήριο Dirichlet ως εξής:
- η $\gamma_k = \frac{1}{k} \downarrow 0$
- η $s_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ είναι φραγμένη (για την ακρίβεια, συγκλίνει στο $s = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$)

Από το κριτήριο Dirichlet:
η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \frac{1}{k}$ συγκλίνει. □

35 Έστω ότι $a_k > 0$ και η $\sum a_k$ αποκλίνει, δηλ. $s_n = a_1 + \dots + a_n \nearrow +\infty$.

(b) Δείξτε ότι: αν $1 \le m < n$ τότε:

$$(*) \quad \frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \dots + \frac{a_n}{s_n} \ge 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(c) Δείξτε ότι:

$$(**) \quad \frac{a_n}{s_n^2} \le \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Λύση

Παράδειγμα: $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει
$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$
$\sum \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει
$\sum \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\ln k)^2}$ συγκλίνει

(b) Πρώτα την υπόδειξη:

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{s_{m+2}} + \dots + \frac{a_n}{s_n} \overset{(s_n)\uparrow}{\ge} \frac{a_{m+1}}{s_n} + \frac{a_{m+2}}{s_n} + \dots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1} + \dots + a_n}{s_n} = \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}.$$

Τώρα:
Έστω ότι η $\sum \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει.
Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy:

$\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad \frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2}$.

Από την (*) $\forall n > m \geq n_0 \quad 1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2}$

Ειδικότερα, $\forall n \geq n_0 \quad 1 - \frac{s_{n_0}}{s_n} < \frac{1}{2} \xrightarrow{s_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty} 1 \leq \frac{1}{2}$.

Άτοπο.

(c) Για την υπόδειξη:

$$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1} \cdot s_n} = \frac{a_n}{s_{n-1} \cdot s_n} \geq \frac{a_n}{s_n \cdot s_n} = \frac{a_n}{s_n^2}$$

Τώρα:

Η σειρά $\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right) = \left(\frac{1}{s_1} - \cancel{\frac{1}{s_2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{s_2}} - \cancel{\frac{1}{s_3}} \right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{s_{N-1}}} - \frac{1}{s_N} \right) =$

$$= \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_N} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{s_1} - 0 = \frac{1}{s_1} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η $\sum \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right)$ συγκλίνει και αφού $0 < \frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$

Από κριτήριο σύγκρισης η $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ συγκλίνει. □