Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 5ο (30-04-2014)

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.

1 Ο $x \in \mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο της (a_n) αν υπάρχει $a_{k_n} \to x$. ($\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n))

2 Ορίζαμε $K = \{x \in \mathbb{R} : x$ οριακό σημείο της $(a_n)\}$.
Δείξαμε ότι το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

3 **Ορισμός**

$s = \limsup a_n = \max K$

$t = \liminf a_n = \min K$

(Δηλ. $\exists a_{k_n} \to s$ και αν $a_{k_n} \to y$ τότε $y \leq s$).

Χαρακτηρισμός

$s = \limsup a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s + \varepsilon\}$ πεπερασμένο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s - \varepsilon\}$ άπειρο.

Παρατήρηση και Ορισμός

Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $\exists a_{k_n} \to +\infty$. (Ισχύει και το αντίστροφο)

Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : a_{k_1} > 1$ (αλλιώς η (a_n) θα ήταν φραγμένη από 1)

Θα βρούμε $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} > 2$.

Ορίζουμε $M = \max\{2, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k_1}\}$

$\exists k_2 \in \mathbb{N} : a_{k_2} > M$ (αλλιώς η (a_n) θα ήταν φρ. από M)

Τότε: (i) $a_{k_2} > M \geq 2 \rightsquigarrow a_{k_2} > 2$

(ii) $$\left.\begin{array}{l} a_{k_2} > a_1 \Rightarrow k_2 \neq 1 \\ a_{k_2} > a_2 \Rightarrow k_2 \neq 2 \\ \vdots \\ a_{k_2} > a_{k_1} \Rightarrow k_2 \neq k_1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 > k_1$$

Στο επαγωγικό βήμα θέτουμε $M=\max\{n+1, a_1, a_2, \dots, a_{k_n}\}$.
Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ $\boxed{a_{k_n}>n}$

Τότε, η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) και $a_{k_n}\to+\infty$

<u>Ορίζουμε</u> $\boxed{\limsup a_n=+\infty}$

Όμοια, αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\exists a_{\lambda_n}\to-\infty$ και ορίζουμε $\boxed{\liminf a_n=-\infty}$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.
Τότε: $a_n\to a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup a_n=\liminf a_n$

<u>Απόδειξη</u>

($\Rightarrow$) Αν $a_n\to a$ τότε <u>κάθε</u> $a_{k_n}\to a \Rightarrow K=\{a\}\Rightarrow \max K=\limsup a_n=a=$
$=\liminf a_n=\min K$.

($\Leftarrow$) Θέτουμε $a=\limsup a_n=\liminf a_n$
Θα δείξουμε ότι $a_n\to a$
Έστω $\varepsilon>0$.
Έχουμε $\{n\in\mathbb{N}: a_n>a+\varepsilon\}$ πεπερασμένο $\Rightarrow$ $\boxed{\exists n_1\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_1 \quad a_n\le a+\varepsilon/2}$
Αφού $a=\liminf a_n$ έχουμε $\{n\in\mathbb{N}: a_n<a-\varepsilon/2\}$ πεπερασμένο
$\Rightarrow$ $\boxed{\exists n_2\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_2 \quad a-\frac{\varepsilon}{2}\le a_n}$
Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$
Τότε, $\forall n\ge n_0$ έχουμε ταυτόχρονα:
$$a-\frac{\varepsilon}{2}\le a_n\le a+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |a_n-a|\le\cancel{\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon$$
Από τον ορισμό του ορίου, $a_n\to a$.

Ασκήσεις

E9 $(a_n), (b_n)$ φραγμένες και $a_n \to a$.

Δείξτε ότι: $\begin{cases} \limsup(a_n+b_n) = a + \limsup b_n \\ \liminf(a_n+b_n) = a + \liminf b_n. \end{cases}$

Λύση

Θέτουμε $x = \limsup(a_n+b_n)$, $y = \limsup b_n$.

Ζητάμε $x = a+y$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Υπάρχει} \quad a_{k_n} + b_{k_n} \to x \\ \text{Επίσης,} \quad a_n \to a \Rightarrow a_{k_n} \to a \end{array}\right\} \Rightarrow b_{k_n} = (a_{k_n} + b_{k_n}) - a_{k_n} \to x - a.$

Άρα, ο $x-a$ είναι οριακό σημείο της $(b_n) \Rightarrow x-a \leq y$

$\Rightarrow \boxed{x \leq a+y}$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, b_{\lambda_n} \to y \\ \text{και} \quad a_n \to a \Rightarrow a_{\lambda_n} \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{a_{\lambda_n} + b_{\lambda_n}}\to a+y$

(υπακολουθία της (a_n+b_n) και $x = \limsup(a_n+b_n)$)

Έπεται ότι $\boxed{a+y \leq x}$. $\square$

I4 Έστω (a_n) (φραγμένη) ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n).

Αν $x_k \to x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι ο x είναι επίσης οριακό σημείο της (a_n).

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Έστω $\varepsilon > 0$

μας φτάνει ένας, αν και ισχύει για όλους τελικά της x_k

Αφού $x_k \to x$ υπάρχει k_0: $|x_{k_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ο x_{k_0} είναι οριακό σημείο της (a_n) άρα υπάρχουν άπειροι φυσικοί n: $|a_n - x_{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Για κάθε τέτοιον n έχουμε
$$|a_n - x| \leq |a_n - x_{k_0}| + |x_{k_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \square$$

31β Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) με την ιδιότητα: κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της (a_n).

<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

- Ένα σύνολο X είναι άπειρο αριθμήσιμο αν και μόνο αν $\exists a : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$
- <u>Το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο.</u>

  Άρα $\exists a : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} = \{a(1), a(2), \dots, a(n)\}$

  Δηλ. το $\mathbb{Q}$ μπορεί να γραφτεί σαν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας.

  (Όπως είπες, έχουμε μια "αρίθμηση" των ρητών αριθμών)

Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της (a_n).
Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και το διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.
Από την <u>πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$</u>, υπάρχουν άπειροι ρητοί στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, δηλ. υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ (διότι $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$)

Άρα, ο x είναι οριακό σημείο της (a_n). $\square$

30 Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$.
Αν $a < b$ και οι a, b είναι οριακά σημεία της (x_n) τότε κάθε $t \in [a, b]$, είναι οριακό σημείο της (x_n)

Λύση

Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, $\exists t \in (a, \beta)$ που δεν είναι οριακό σημείο της (x_n).

Τότε $\exists \varepsilon > 0$: στο $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος όροι της (x_n).

Μπορούμε, μικραίνοντας το ε, να υποθέσουμε ότι $a < t-\varepsilon < t < t+\varepsilon < \beta$.

Ισοδύναμα, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad x_n \notin (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

(α) Αφού $x_{n+1} - x_n \to 0$ $\exists N_1: \forall n \geq N_1 \quad |x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$

(β) Αφού ο a είναι οριακό σημείο της (x_n), άπειροι όροι της (x_n) είναι $< t-\varepsilon$, και αφού ο β είναι οριακό σημείο της (x_n) άπειροι όροι είναι $> t+\varepsilon$.

Από τα (α) και (β) μπορούμε να βρούμε $k, s > \max\{N, N_1\}$ ώστε $x_k < t-\varepsilon$ και $x_s > t+\varepsilon$.

Μπορούμε, επίσης, να υποθέσουμε ότι $k < s$ (ή διακρίνουμε περιπτώσεις)

Ορίζουμε $m = \max\{n \in \mathbb{N}: k \leq n < s \text{ και } x_n < t-\varepsilon\}$.

Τότε, $x_m < t-\varepsilon$ και $x_{m+1} \geq t-\varepsilon \Rightarrow x_{m+1} \geq t+\varepsilon$ (γιατί $x_{m+1} \notin (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$)

Τότε $x_{m+1} - x_m > (t+\varepsilon) - (t-\varepsilon) = 2\varepsilon$

Άτοπο, γιατί $m > N \Rightarrow |x_{m+1} - x_m| < 2\varepsilon$. □

20 Έστω $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \boxed{\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}$ (*)

(β) Συμπεράνατε ότι: αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to y$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to y$.

Λύση

Θα δείξουμε την (*).

Έστω $\varepsilon > 0$

Αν $x = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, τότε $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x + \varepsilon$.

Γράφουμε: $\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq x+\varepsilon \Rightarrow a_{N+1} \leq a_N(x+\varepsilon)$

Όμοια, $a_{N+2} \leq a_{N+1}(x+\varepsilon) \leq a_N(x+\varepsilon)^2$

$\vdots$

$\underbrace{a_{N+k}}_{n} \leq a_N (x+\varepsilon)^k \quad \forall k=1,2,\dots$

$\Rightarrow \forall n>N \quad a_n \leq a_N (x+\varepsilon)^{n-N} = \frac{a_N}{(x+\varepsilon)^N}(x+\varepsilon)^n = M(x+\varepsilon)^n$

Τότε, $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}(x+\varepsilon) \overset{?}{\Longrightarrow} \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup(\sqrt[n]{M}(x+\varepsilon)) =$

$= \lim(\sqrt[n]{M}(x+\varepsilon)) = x+\varepsilon$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται ότι

$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Πώς εξηγείται το (?).

Υπόδειξη: Αν $\gamma_n \leq \delta_n$ τότε $\underbrace{\limsup \gamma_n}_{X} \leq \underbrace{\limsup \delta_n}_{Y}$

Έστω ότι είχαμε $X>Y \Rightarrow \exists \varepsilon>0: Y+\varepsilon < X-\varepsilon$

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad \delta_n \leq Y+\varepsilon$

Άπειροι $\gamma_n > X-\varepsilon \Rightarrow \exists n_0 \geq N: \gamma_{n_0} > X-\varepsilon$

Τότε: $\gamma_{n_0} > X-\varepsilon > Y+\varepsilon \geq \delta_{n_0} \Rightarrow \gamma_{n_0} > \delta_{n_0}$

Άτοπο.

$\square$