6 Οι Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

6.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θα θεωρήσουμε γνωστές τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως αυτές ορίζονται με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και τις βασικές αλγεβρικές τους ιδιότητες.

Υπενθυμίζουμε τις αναλυτικές τους ιδιότητες:

1. Οι sin και cos είναι συνεχείς στο 0.

   Απόδειξη Η ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$, που ισχύει όταν $|x| < \frac{\pi}{2}$, δείχνει ότι το όριο $\lim_{x\to 0}\sin x$ υπάρχει και είναι 0, άρα η sin είναι συνεχής στο 0. Η σχέση $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ δείχνει ότι $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, άρα η cos είναι συνεχής στο 0.

2. Οι sin και cos είναι συνεχείς παντού στο $\mathbb{R}$.

   Απόδειξη $\lim\limits_{h\to 0}\sin(x+h) = \sin x \lim\limits_{h\to 0}\cos h + \cos x \lim\limits_{h\to 0}\sin h = \sin x.$
   $\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+h) = \cos x \lim\limits_{h\to 0}\cos h - \sin x \lim\limits_{h\to 0}\sin h = \cos x.$

3. Ισχυρισμός: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

   Απόδειξη Από τον τριγωνομετρικό κύκλο ξέρουμε ότι

   $$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

   άρα, αφού η sin είναι περιττή και η cos άρτια,

   $$|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

   οπότε (αφού $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$)

   $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

4. $\sin'(x) = \cos(x),\ \ \cos'(x) = -\sin(x),\ \ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ \ \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}.$

Απόδειξη Από τους γνωστούς τύπους $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ και $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{1}{h}2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2} \\
&= \frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos x. \\
\text{και} \quad \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= -\frac{1}{h}2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin x
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο (3) και την συνέχεια των sin και cos. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) &= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

5. Από το (4) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int \cos x dx = \sin x + c, &\quad \int \sin x dx = -\cos x + c \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c, &\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

$$\begin{aligned}
\int x\cos x dx &= \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int (x)'\sin x dx = x\sin x - \int \sin x dx \\
&= x\sin x + \cos x + c. \\
\int x^2\cos x dx &= \int x^2(\sin x)'dx = x^2\sin x - \int (x^2)'\sin x dx \\
&= x^2\sin x - 2\int x\sin x dx = x^2\sin x + 2\int x(\cos x)'dx \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int (x)'\cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.
\end{aligned}$$

6.2 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δεν είναι βεβαίως 1-1 (μάλιστα, είναι περιοδική). Αν όμως την περιορίσουμε στο διάστημα $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ τότε γίνεται 1-1 (μάλιστα είναι γνησίως αύξουσα, γιατί η παράγωγός της, δηλαδή η $\cos x$, είναι γνησίως θετική στο $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Επομένως η συνάρτηση sin περιορισμένη στο διάστημα $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι αντιστρέψιμη.

Ορισμός 6.1 *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \textit{με} \;\; f(x) = \sin x.$$

Η αντίστροφη $f^{-1} : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ονομάζεται ***τόξο ημιτόνου*** *και συμβολίζεται* $f^{-1}(x) = \arcsin x$ *ή* τοξημ x. *Δηλαδή εξ ορισμού έχουμε, για κάθε* $x \in [-1, 1]$,

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \;\; \textbf{\textit{και}} \;\; y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Παρατήρηση 6.1 *Η συνάρτηση* arcsin *είναι παραγωγίσιμη στο* $(-1, 1)$ *και*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (x \in (-1, 1)).$$

(Η παράγωγος στα σημεία $x = -1$ *και* $x = 1$ *δεν υπάρχει.)*

Απόδειξη Έστω $x \in [-1, 1]$ και $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$. Αν $x = -1$ ή $x = 1$, τότε $f'(y) = \cos y = 0$, επομένως η $(f^{-1})'(x)$ δεν υπάρχει. Αν $x \in (-1, 1)$ τότε $y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f'(y) = \cos y > 0$. Συνεπώς η $(f^{-1})'(x)$ υπάρχει και

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

γιατί $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ (αφού $\cos y > 0$).

Ορισμός 6.2 *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$g : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \textit{με} \;\; g(x) = \cos x.$$

Η αντίστροφη $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

ονομάζεται ***τόξο συνημιτόνου*** *και συμβολίζεται* $g^{-1}(x) = \arccos x$ *ή* τοξσυν x. *Δηλαδή εξ ορισμού έχουμε, για κάθε* $x \in [-1, 1]$,

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \;\; \textbf{\textit{και}} \;\; y \in [0, \pi].$$

Παρατήρηση 6.2 *Η συνάρτηση* arccos *είναι παραγωγίσιμη στο* $(-1,1)$ *και*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x \in (-1,1)).$$

(Η παράγωγος στα σημεία $x=-1$ *και* $x=1$ *δεν υπάρχει.)*

Απόδειξη Αν $x \in [-1,1]$ και $y = g^{-1}(x) = \arccos x$ έχουμε $g'(y) = \sin y$, άρα $g'(y) = 0$ για $x = -1$ και $x = 1$, οπότε η $(g^{-1})'(x)$ δεν υπάρχει, ενώ $\sin y > 0$ για $x \in (-1,1)$ άρα η $(g^{-1})'(x)$ υπάρχει και

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Παρατήρηση 6.3 Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = \arccos x + \arcsin x$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και έχει παράγωγο 0 στο $(-1,1)$, άρα είναι σταθερή. Πράγματι, αν στο τόξο $\theta \in [0,\pi]$ που έχει συνημίτονο τον αριθμό x (δηλαδή $\cos\theta = x$) προσθέσουμε το τόξο $\psi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ που έχει ημίτονο τον ίδιο αριθμό x (δηλαδή $\sin\psi = x$) θα βρούμε βεβαίως $\theta + \psi = \frac{\pi}{2}$. Δηλαδή

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1,1]).$$

Ορισμός 6.3 *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$h : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \textit{με} \;\; h(x) = \tan x.$$

$$\textit{Η αντίστροφη} \;\; h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ονομάζεται ***τόξο εφαπτομένης*** *και συμβολίζεται* $h^{-1}(x) = \arctan x$ *ή* τοξεφ x. *Δηλαδή εξ ορισμού έχουμε*

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \textit{ και } y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Παρατήρηση 6.4 *Η συνάρτηση* arctan *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $y = h^{-1}(x) = \arctan x$, οπότε $x = h(y) = \tan y$ και άρα $h'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες παρατηρήσεις, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού προκύπτει ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c.$$

Παραδείγματα 6.5

(i) $$\int \arcsin x dx = \int (x)' \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \arcsin' x dx$$
$$= x\arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \phi'(x)\frac{1}{\sqrt{\phi(x)}}dx$$

(όπου $y = \phi(x) = 1 - x^2$ για $x \in (-1,1)$)

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = x\arcsin x + (\phi(x))^{1/2} + c$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

(ii) $$\int \arccos x dx = x \arccos x - \int x \arccos' x dx$$
$$= x\arccos x + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \arccos x - \frac{1}{2}\int \phi'(x)\frac{1}{\sqrt{\phi(x)}}dx$$

(ίδια αντικατάσταση) $= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$

(iii) $$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x \arctan' x dx = x\arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= x \arctan x + \frac{1}{2}\int \psi'(x)\frac{1}{\psi(x)}dx \qquad (\psi(x) = 1 + x^2)$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

Άσκηση 6.6 Αν

$$\omega(x) = \arctan\frac{1}{x} + \arctan x, \qquad x \neq 0$$

παρατηρούμε ότι η ω είναι παραγωγίσιμη και

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0.\end{aligned}$$

Αλλά $\omega(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ ενώ $\omega(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = \frac{-\pi}{2}$. Άρα η ω δεν είναι σταθερή. Πώς εξηγείται αυτό;