Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 25 Ιανουαρίου 2023

1. (1+1 μον.) (α) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\alpha_n \to 0$. Αποδείξτε ότι η (α_n) έχει υπακολουθία (α_{k_n}) τέτοια ώστε $|\alpha_{k_n}| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geqslant 1$.
(β) Προσδιορίστε το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας

$$\beta_n = \sqrt[n]{3^{(-1)^n n} + 2^n}$$

και βρείτε τα $\liminf \beta_n$ και $\limsup \beta_n$.

2. (1.5+1.5 μον.) Έστω $(a_k), (b_k)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση καθεμιά από τις ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}.$$

3. (0.5+1+1 μον.) (α) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$, αποδείξτε ότι η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(γ) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ και $g(x) = x \ln x$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

4. (1+1 μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ υπάρχει $y \in [\gamma, \delta]$ ώστε $f(y) \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 2(b - a).$$

(β) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Εξηγήστε γιατί η συνάρτηση $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$H(x) = \int_a^x f(t)\, dt \cdot \int_x^b g(t)\, dt$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$g(\xi) \int_a^{\xi} f(t)\, dt = f(\xi) \int_{\xi}^b g(t)\, dt.$$

5. (1.5+1 μον.) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\ln x)\, dx \qquad \text{και} \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} dt, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Καλή Επιτυχία!