

Απειροστικός Λογισμός II

Χειμερινό εξάμηνο 2021-22

Εξέταση περιόδου Ιανουαρίου - 17-01-2022

Θέμα 1ο. (1,5 Μονάδες)

Αποδείξτε ότι κάθε κάτω φραγμένη ακολουθία (a_n) είτε έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.

Θέμα 2ο. (2+1=3 Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^k}{10^{k^2}} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} .$$

(β) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3ο. (3 Μονάδες)

Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α) Αν η ακολουθία (b_n) είναι βασική (Cauchy), τότε και η ακολουθία (b_n^2) είναι βασική.

(β) Αν η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ με $f(x_0) > 0$, τότε $\int_0^1 f(x) dx > 0$.

(γ) Η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Θέμα 4ο. (2+1=3 Μονάδες)

(α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \sin(\log x) dx, \quad \int \frac{1}{e^x - 1} dx$$

(β) Αν $0 < a < b$, βρείτε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(nx) \log x dx .$$

Θέμα 5ο. (1,5 Μονάδες)

Αν

$$g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots ,$$

να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , καθώς και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Καλή Επιτυχία