Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Χειμερινό εξάμηνο 2021-22

Εξέταση προόδου - 27-11-2021

Θέμα 1ο.

(α) Δίνεται ακολουθία (a_n). Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a, \ \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = b \ \text{ και } \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Δείξτε ότι $a = b$ και ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(β) Δίνεται ακολουθία (a_n) με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_{k_n}|$ να συγκλίνει.

Θέμα 2ο.

Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α) Αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sqrt{a_k}$.

(γ) Αν η συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η (x_n) είναι βασική ακολουθία στοιχείων του A, τότε η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι επίσης βασική.

Θέμα 3ο.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση καθεμιά από τις ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k!)^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^2 k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right), \text{ για τις διάφορες τιμές του } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 4ο.

(α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $b > a$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(a, b]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[b, +\infty)$. Αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(a, +\infty)$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Καλή Επιτυχία