

Απειροστικός Λογισμός II – 3ο Κλιμάκιο
23 Ιουνίου 2021

1. (1 μον.) Έστω $(a_n), (b_n)$ φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών και έστω ότι $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup_n (a_n + b_n) = a + \limsup_n b_n.$$

2. (1.5+1.5 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1 \right)^k, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}.$$

3. (1.5 μον.) Έστω $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $\alpha > 0$ και $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1 + nx} dx.$$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx, \quad \int x^2 \ln x dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Βρείτε τις παραγώγους κάθε τάξης στο 0 της συνάρτησης $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 1$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και τέτοια ώστε

$$f(x)^2 = 2 \int_0^{\sqrt{x}} f(t^2) dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$.