Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 4ο Κλιμάκιο (εξ αποστάσεως)
23 Ιουνίου 2021

1. (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και (x_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι

$$f(\limsup x_n) \leqslant \limsup f(x_n) \quad \text{και} \quad \liminf f(x_n) \leqslant f(\liminf x_n).$$

2. (1.5+1.5 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ συγκλίνουν τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^4$ συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$

3. (1.5 μον.) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leqslant x \leqslant \delta\} \leqslant \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \lambda(b-a).$$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx, \qquad \int \cos^2 x \sin^3 x\,dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Προσδιορίστε όλους τους $b \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(e^{1/k} - 1 - \frac{b}{k}\Big).$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x)\int_0^x f(t)dt$$

είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι:

(i) Η συνάρτηση $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $G(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ είναι η μηδενική συνάρτηση.

(ii) Η f είναι η μηδενική συνάρτηση.