Πανεπιστήμιο Αθηνών - Τμήμα Μαθηματικών

Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ - 4 Φεβρουαρίου 2020

1. ($4\times 0,5 = 2$ μον.) (α) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(i) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

(iii) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{3/2}$.

(β) Να δώσετε παράδειγμα ακολουθιών (a_n), (b_n) με την ιδιότητα

$$\limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$$

2. ($4 \times 0,5 = 2$ μον.) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$$

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει απολύτως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \sin \frac{1}{k}$. Αν όχι, εξετάστε αν αυτή συγκλίνει υπό συνθήκη.

3. ($1,2 + 0,8 = 2$ μον.) (α) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}\log^2 x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. ($0,7 + 0,8 = 1,5$ μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \geqslant 0.$$

Να δείξετε ότι (i) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και (ii) $f(x) = x$ για κάθε $x \geqslant 0$.

5. ($1,2 + 0,6 + 0,7 = 2,5$ μον.) (α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \quad \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx \qquad \text{(ii)} \quad \int x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx$$

(β) (i) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ συγκλίνει και ότι $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \leqslant \frac{5}{e}$.

6. ($1 + 1 = 2$ μον.) (α) Να βρείτε τη σειρά Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ και να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ αν } x \neq 0 \quad \text{ και } \quad g(0) = 1.$$

Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγωγο κάθε τάξης και να υπολογίσετε την $g^{(10)}(0)$.

Καλή Επιτυχία!