ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
26/06/2019

ΘΕΜΑ 1. (α) Να βρεθούν τα οριακά σημεία και τα $\limsup$ και $\liminf$ της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.
(β) Έστω $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_{2n} \to \alpha$ και $\alpha_{2n-1} \to \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο των οριακών σημείων της (α_n) είναι το $K = \{\alpha, \beta\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-συνεχής. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι η f είναι Lipschitz-συνεχής εάν και μόνον εάν έχει φραγμένη παράγωγο.
(γ) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x) = \sin e^x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνουσα σειρά. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sqrt[n]{n}$ συγκλίνει.
(β) Αποδείξτε, συγκρίνοντας με την τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.
(γ) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{1}{n})$.

ΘΕΜΑ 4. Για κάθε $n \geq 1$, ορίζουμε $\alpha_n = \int_1^n \frac{\cos x}{x^2} dx$. Αποδείξτε ότι $\forall\ m \geq n \geq 1$ ισχύει $|\alpha_m - \alpha_n| \leq \frac{1}{n}$ και συμπεράνατε ότι η (α_n) συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και ολοκλήρωση κατά μέρη (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο) αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\sin x}{x}\, dx$ και κατόπιν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Βρείτε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.
(β) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot (-x)^{2n-1}.$$

ΘΕΜΑ 6. (α) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις και $x_o \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι οι f, g διαφέρουν μόνον στο x_o. Αποδείξτε πλήρως ότι αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη, τότε και η g είναι Riemann-ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Να γραφετε 5 από τα 6 θέματα.
Καλή επιτυχία!