Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού II

4 Ιουνίου 2018

1. (2 μον.) (α) Να βρεθούν τα $\limsup$ και $\liminf$ της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

(γ) Αποδείξτε ότι η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ για κάθε n, m με $m > n \geqslant N$.

2. (α) **(1 μον.)** Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

(β) **(1 μον.)** (i) Εξετάστε αν συγκλίνει η παρακάτω σειρά και αν ναι, υπολογίστε το άθροισμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

(ii) Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$, όπου $p > 0$ δοσμένος αριθμός.

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας πλήρως.

3. (α) **(1 μον.)** Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f\colon I \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subseteq I$. Έστω και $x_0 \in I$. Δείξτε ότι η $F\colon I \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$, $x \in I$, είναι Lipschitz συνεχής.

(β) **(1 μον.)** (i) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Ισχύει το (i) χωρίς την υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. (α) **(1 μον.)** Δείξτε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, είναι ολοκληρώσιμη.

(β) **(1 μον.)** Υπάρχει συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία παίρνει μόνο τις τιμές μηδέν και ένα και δεν είναι ολοκληρώσιμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας πλήρως.

5. (α) **(1.5 μον.)** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}, \qquad \int \cos^3 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

(β) **(0.5 μον.)** Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$, $x \in (0, +\infty)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. (α) **(1 μον.)** Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους $f^{(k)}$ κάθε τάξης, και έστω ότι $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f ισούται με το ανάπτυγμα Taylor της γύρω από το $x_0 = 0$, δηλαδή ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

(β) **(1 μον.)** (i) Δείξτε ότι

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right| \leqslant \frac{1}{5040},$$

για κάθε x με $|x| \leqslant 1$.

(ii) Να βρεθεί το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Γράψτε πέντε από τα έξι θέματα.

Καλή επιτυχία!