

# Απειροστικός Λογισμός II

Εξέταση 28 Αυγούστου 2017

1. (α) Αν  $(a_n)$  είναι φραγμένη ακολουθία, δείξτε ότι το σύνολο  $K$  των οριακών σημείων της  $(a_n)$  είναι μη κενό και έχει μέγιστο στοιχείο.

(β) Να βρεθούν τα οριακά σημεία των ακολουθιών  $(a_n)$  και  $(b_n)$  όπου

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right) + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad b_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

2. (α) Εξετάστε αν ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(i) Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει, τότε η ακολουθία  $(a_n)$  είναι φραγμένη.

(ii) Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$  τότε  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sin^4 n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n-1}.$$

3. (α) Αποδείξτε πλήρως ότι η συνάρτηση  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} n^5 \left(\frac{x}{5}\right)^n$  και τις τιμές του  $x$  όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει.

4. (α) Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση. Δείξτε ότι  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $A$  αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών  $(x_n), (y_n)$  στο  $A$  με  $x_n - y_n \rightarrow 0$  ισχύει

$$f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0.$$

(β) Αν η  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, δείξτε ότι η ακολουθία  $(g(\frac{1}{n}))$  συγκλίνει.

5. (α) Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  φραγμένη συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι για κάθε  $c \in (a, b)$  η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[c, b]$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[a, b]$ .

(β) Δίδονται  $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $f_1(t) = \frac{1}{t}$  και  $f_2(t) = \sin \frac{1}{t}$  για κάθε  $t \in (0, 1]$  Εξετάστε αν οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι ολοκληρώσιμες στο  $[0, 1]$ .

6. (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int x \sin^2 x dx \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

(β) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  απεριόριστα παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $M > 0$  ώστε  $|f^{(k)}(x)| \leq M$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $k = 0, 1, \dots$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 (δηλαδή ότι υπάρχει ακολουθία  $(a_k)$  πραγματικών αριθμών ώστε  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ).

Να διατυπώνετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε.

Να γραφούν **5 από τα 6** θέματα.

**Καλή επιτυχία!**