**Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)**

Ενδιάμεση Εξέταση – 4 Δεκεμβρίου 2010

**1.** (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(a_n)$ η οποία δεν είναι άνω φραγμένη αλλά έχει φραγμένη υπακολουθία.

(β) (Θεωρία) Δείξτε ότι: αν μια ακολουθία Cauchy $(a_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η $(a_n)$ συγκλίνει.

**(2μ)**

**2.** Έστω $(a_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

**(1.5μ)**

**3.** Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^4+1}-k^2\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$$

**(2μ)**

**4.** (α) (Θεωρία) Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f,g,h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζονται παρακάτω, είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$f(x)=\ln x, \qquad g(x)=\sqrt{x}, \qquad h(x)=x\sin x.$$

**(2.5μ)**

**5.** (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $0<x\leq 1$ και $g(0)=0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $P_\varepsilon$ του $[0,1]$ ώστε

$$U(g,P_\varepsilon)-L(g,P_\varepsilon)<\varepsilon.$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε διάστημα $[\gamma,\delta]\subseteq[a,b]$ ισχύει

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

**(2.5μ)**

**6.** (α) (Θεωρία) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ της $f$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\leq (b-a)\int_a^b (f(x))^2dx.$$

**(2μ)**

**Καλή επιτυχία!**

**Ενδεικτικές Απαντήσεις**

**1.** (α) Ορίζουμε $a_{2k-1} = 1$ και $a_{2k} = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη διότι $a_{2k} = 2k \to +\infty$. Έχει όμως φραγμένη υπακολουθία, την σταθερή ακολουθία $a_{2k-1} = 1$.

(β) (Θεωρία) Υποθέτουμε ότι η $(a_n)$ είναι ακολουθία Cauchy και ότι η υπακολουθία $(a_{k_n})$ συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_{k_n} \to a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$,

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η $(a_n)$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_2$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$, άρα

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης $k_n, n \geq n_0 \geq n_2$, άρα

$$|a_{k_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to a$.

**2.** (i) Λάθος: αν $a_k = \frac{1}{k}$ τότε $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ αλλά η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(ii) Λάθος: αν $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει αλλά η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

**3.** (i) Για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^4+1} - k^2\right)$ γράφουμε $a_k = \sqrt{k^4+1} - k^2 = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}+k^2}$. Δείχνουμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2}$, όπου $b_k = \frac{1}{k^2}$. Άρα, οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ έχουν την ίδια συμπεριφορά. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(ii) Για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \to \frac{2}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(iii) Για τη σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπύκνωσης. Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k(\ln k)^2}$ φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln(2^k))^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει, έπεται ότι η $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει.

**4.** (α) (Θεωρία) Υποθέτουμε ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες $(x_n)$, $(y_n)$ στο $[a, b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a \leq x_n, y_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι $(x_n)$ και $(y_n)$ είναι φραγμένες ακολουθίες. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n$, συμπεραίνουμε ότι $a \leq x \leq b$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} \to x \in [a, b].$$

Παρατηρούμε ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \to x - 0 = x.$$

Από τη συνέχεια της $f$ στο $x$ έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{k_n}) \to f(x).$$

Δηλαδή,

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to x - x = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$ διότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$ επεκτείνεται συνεχώς στο $[0, +\infty)$ αν θέσουμε $g(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα και στο $(0, +\infty)$. Ένας τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, +\infty)$ και μετά να χρησιμοποιήσουμε ένα γνωστό επιχείρημα για την ένωσή τους. Η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$ ως συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα. Είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής, στο $[1, +\infty)$ γιατί $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$ για $x \geq 1$, δηλαδή η $g$ έχει φραγμένη παράγωγο στο $[1, +\infty)$.

Η $h(x) = x \sin x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι η $f'(x) = x\cos x + \sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου $n$ μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε, $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά

$$f(y_n) - f(x_n) = \big(2n\pi + (1/n)\big)\sin(1/n) = 2\pi\frac{\sin(1/n)}{1/n} + \frac{\sin(1/n)}{n} \to 2\pi \cdot 1 + 0 = 2\pi \neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**5.** (α) Η $g$ είναι φραγμένη: $|g(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η $g$ είναι συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$, άρα υπάρχει διαμέριση $Q$ του $[b, 1]$ με την ιδιότητα

$$U(g, Q) - L(g, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0, 1]$. Τότε,

$$U(g, P) - L(g, P) = b(M_0 - m_0) + U(g, Q) - L(g, Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{g(x) : 0 \leq x \leq b\} \leq 1 \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{g(x) : 0 \leq x \leq b\} \geq -1.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leq 2$, άρα

$$U(g, P) - L(g, P) < 2b + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η $g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(β) Έστω ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) > 0$. Από τη συνέχεια της $f$ στο $x_0$ μπορούμε να βρούμε περιοχή του $x_0$, δηλαδή διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. Τότε,

$$\int_\gamma^\delta f(x)dx \geq \frac{f(x_0)(\delta - \gamma)}{2} > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) < 0$.

**6.** (α) (Θεωρία) Αφού η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|x - y|. \end{aligned}$$

Άρα, η $F$ είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά $M$).
(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφουμε

$$\left( \int_a^b f(x) \sin x \, dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left( \int_a^b \sin^2 x \, dx \right)$$

και

$$\left( \int_a^b f(x) \cos x \, dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left( \int_a^b \cos^2 x \, dx \right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left( \int_a^b f(x) \sin x \, dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \cos x \, dx \right)^2 \\ \leq & \left( \int_a^b \sin^2 x \, dx + \int_a^b \cos^2 x \, dx \right) \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \\ = & \left( \int_a^b (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx \right) \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \\ = & \left( \int_a^b 1 \, dx \right) \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \\ = & (b - a) \int_a^b (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$