ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Εξετάσεις 07.09.2009

Θ.1 Να δώσετε δύο ισοδύναμους ορισμούς της ολοκληρωσιμότητας κατά Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. (1μ)

Θ.2 Έστω $\alpha_\nu = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu^2}$ για $\nu = 1,2,\ldots$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$, ώστε $\sum\limits_{k=\nu+1}^{+\infty} \alpha_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$ για κάθε $\nu\geq\nu_0$. (2μ)

Θ.3 Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu\,\eta\mu\,\nu + \sqrt[\nu]{\nu^5}}{(2\nu-\sqrt{\nu})^3}$$

(1μ)

Θ.4 Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{3}\right)$ $\nu=0,1,2,\ldots$. Να βρεθούν τα όρια των υπακολουθιών της και τα $\limsup\alpha_\nu$, $\liminf\alpha_\nu$. (1,5)

Θ.5 Εξετάστε για ποια $x\in\mathbb{R}$ η $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}\left(\eta\mu\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\cdot(2x-1)^{\nu}$ συγκλίνει. (1,5)

Θ.6 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει η $f''(0)$.
Με την χρήση του πολυωνύμου Taylor αυτής, αποδείξτε ότι:

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}$$

(1,5μ)

Θ.7 Έστω η ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. (1μ)

Θ.8 i) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, συνεχής στο $x_0=\frac{1}{2}$ με $f(\frac{1}{2})=1$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x)dx > 0$ (2)

ii) Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμης, με $g(\frac{1}{2})=1$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, ώστε $\int_0^1 g(x)dx=0$

iii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ ώστε $1=\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)$

Θ.9 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \text{τοξεφ}\, x \, dx \quad , \quad \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \quad , \quad \int \frac{dx}{e^x+e^{2x}} \qquad (1,5)$$