ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2007–08)

15 Σεπτεμβρίου 2008

1. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στο 0.

(β) Έστω (b_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\liminf b_n = -5$ και $\limsup b_n = 10$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $\gamma_n = \frac{b_n}{1+\ln n}$.

(1.5μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω σειρές, εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}\,\frac{1}{k}}{k}\,.$$

(1.5μ)

3. (α) Αποδείξτε πλήρως ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν είναι φραγμένη.

(ii) Η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$.

(2μ)

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

(α) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

(β) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$.

(1.5μ)

5. Έστω $a > 0$ και $g : [-a,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $g(x) = e^x + \text{ημ}\,\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $g(0) = 500$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a,a]$ και υπολογίστε το $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx$.

(1.5μ)

6. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$.

(β) Ορίζουμε $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^x e^t\,\text{συν}(x-t)\,dt$. Βρείτε την G'.

(1.5μ)

7. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx, \qquad \int e^x \text{ημ}\,x\,dx, \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

(2μ)

8. Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 των συναρτήσεων $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x^2}$ και $\frac{1}{(1-x)^2}$. Ποιές είναι οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών που βρήκατε;

(1.5μ)

---

(1) Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο των αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!